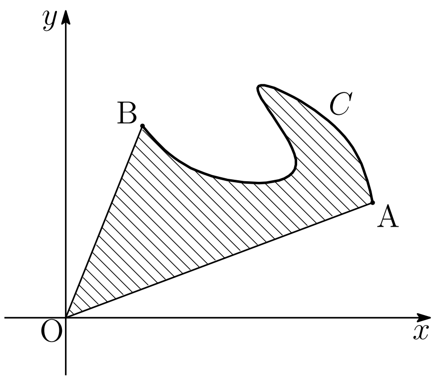
ガウス・グリーンの定理

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C : x = f(t),\ y = g(t)\ (\alpha \leqq t \leqq \beta)$ について，$t = \alpha,\ \beta$ に対応する点をそれぞれ A，B とする．C と直線 OA，OB で囲まれた部分の面積を S とすると
(OB の偏角 >OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$



証明 C 上の点 $\mathrm{P}(f(t),\ g(t))$ と隣接する C の点 $\mathrm{Q}(f(t+\Delta t),\ g(t+\Delta t))$ をとる．
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の向きを $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位ベクトルを

$$\vec{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}(-g(t),\ f(t))$$

とする．P を通り $\vec{e}$ に平行な直線を l とし，Q から l に垂線 QR をを引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = (\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{e})\vec{e}$$

$\Delta t \fallingdotseq 0$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \Delta t(f'(t),\ g'(t))$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{\Delta t}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\vec{e}$$

$\triangle$OPQ の符号付き面積 ΔS は

$$\Delta S = \frac{1}{2}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}\Delta t$$

したがって，上の図の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\}dt$$

証終

ハイポサイクロイド (内サイクロイド) の面積

$R = nr$ であるハイポサイクロイド

$$
\begin{aligned}
x &= (n-1)r\cos\theta + r\cos(n-1)\theta, \\
y &= (n-1)r\sin\theta - r\sin(n-1)\theta
\end{aligned}
$$

について

$$
\begin{aligned}
\frac{x'}{r} &= -(n-1)\{\sin\theta + \sin(n-1)\theta\}, \\
\frac{y'}{r} &= (n-1)\{\cos\theta - \cos(n-1)\theta\}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{xy' - x'y}{r^2(n-1)} &= \{(n-1)r\cos\theta + r\cos(n-1)\theta\}(n-1)\{\cos\theta - \cos(n-1)\theta\} \\
&\qquad + (n-1)\{\sin\theta + \sin(n-1)\theta\}\{(n-1)\sin\theta - \sin(n-1)\theta\} \\
&= (n-1)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \{\cos^2(n-1)\theta + \sin^2(n-1)\theta\} \\
&\qquad - (n-2)\{\cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta\} \\
&= (n-2)(1 - \cos n\theta)
\end{aligned}
$$

したがって，ガウス・グリーンの定理の定理に適用すると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - x'y)d\theta \\
&= \frac{1}{2}r^2(n-1)(n-2)\int_0^{2\pi}(1 - \cos n\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}r^2(n-1)(n-2)\Big[\ \theta - \frac{1}{n}\sin n\theta\ \Big]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{\pi r^2(n-1)(n-2)}
\end{aligned}
$$

また，$r = \dfrac{R}{n}$ であるから，これを上式に代入すると

$$
\boldsymbol{S = \frac{\pi R^2(n-1)(n-2)}{n^2}}
$$

n が十分大きいとき，半径 R の基準円に対して，半径 r の動円が小さいから，その面積は基準円の面積 πR^2 に収束する．

極方程式による面積

極方程式 $x = r(\theta)\cos\theta,\quad y = r(\theta)\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta}y &= r(\theta)\cos\theta\{r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\} \\ &\qquad - \{r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\}r(\theta)\sin\theta \\ &= r(\theta)^2 \end{aligned}$$

したがって，ガウス・グリーンの定理から極方程式による面積公式が得られる．

極方程式による面積公式

$$S = \int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta$$

おすすめサイト

- 難関国立大学の過去問が掲載されています．
  https://math4u.site/
- ガウス・グリーンの定理 (パラメータによる面積公式)
  [2021 年熊大 3 番] 熊大医学部入試の軌跡 2015-2022(p.81)
  http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_kiseki_i_15_22.pdf
- 理数系 [2022 年] の pp.68-69(物理頁 69-70)
  http://kumamoto.s12.xrea.com/2022/risuu_2022.pdf
- 斜軸による回転体の体積
  [2022 年九工大後期 2 番 (別解)]
  http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2022_kouki.pdf
  [2020 年東工大 4 番 (別解)]
  http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf
- 極方程式による求積問題 (弧長，面積，回転体の体積) のまとめ
  [神戸大学 2016 年理系 (p.12)]
  http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf

パップス・ギュルダンの定理

ガウス・グリーンの定理が面積の求積問題で重要であるように，回転の体積ではパップス・ギュルダンの定理が重要です．傘型積分もこれに含まれます．

2020 年 京大特色

ブラマンジェという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある．ここではブラマンジェが，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^{N} \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体として与えられているとする．ただし，ここで N は自然数，$s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする．

(1) ブランマンジェの体積を計算し，N を用いて表せ．

(2) (1) で求めた体積の $N \to \infty$ の極限を求めよ．

ただし，計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい．ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである．

> 面積 S の平面図形 A が，それと同一平面上の直線 l の一方の側 (直線 l を含む) のみにあるとき，その図形 A を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積は，(回転による A の重心の移動距離) $\times S$ となる．

また面積 S の平面図形 A が，区間 $a \leqq x \leqq b$ 上で，$\varphi(x) \leqq \psi(x)$ となる連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を用いて

$$A = \{(x,\ y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\}$$

と表せたとき，A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx,\ \frac{1}{S} \int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \varphi(x)^2}{2}\, dx \right)$$

であることを証明無しに使ってもよい．

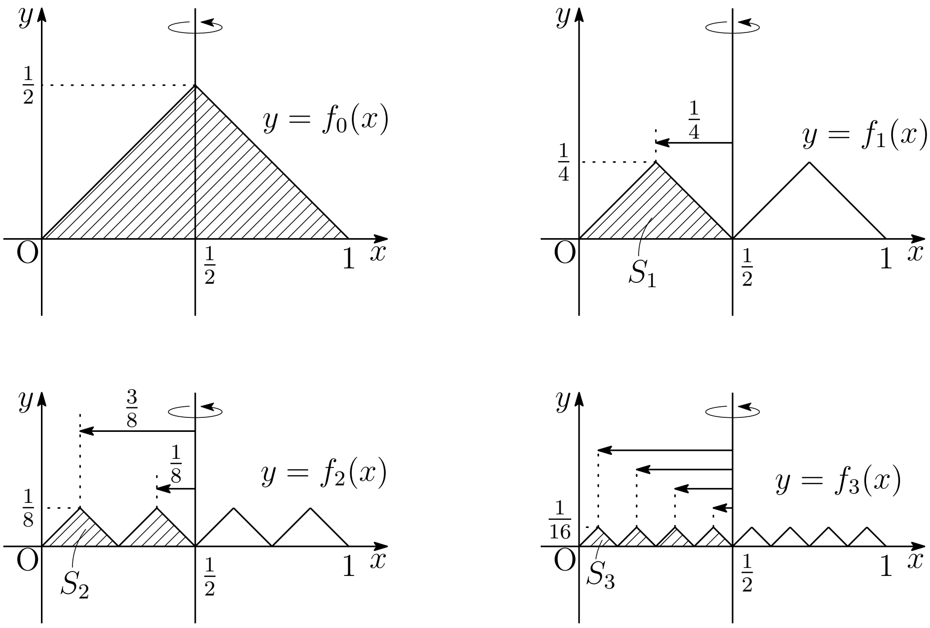
解答　(1) $s(x)$ は x から最も近い整数までの距離であるから　$0 \leqq s(x) \leqq \dfrac{1}{2}$

$f_n(x) = \dfrac{s(2^n x)}{2^n}$ とおくと，$0 \leqq s(2^n x) \leqq \dfrac{1}{2}$ より　$0 \leqq f_n(x) \leqq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

$s(2^n(1-x)) = s(2^n - 2^n x) = s(-2^n x) = s(2^n x)$ より　$f_n(1-x) = f_n(x)$

したがって，$f_n(x)$ のグラフは直線 $x = \dfrac{1}{2}$ に関して対称である．

$n = 0, 1, 2, 3$ について，$y = f_n(x)$ のグラフは次のようになる．



$y = f_n(x)$ を直線 $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_n とする．

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{24}$$

例えば，V_3 は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 4 つの三角形 $\left(\text{面積 } S_3 = \dfrac{1}{256}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_3 = 2\pi S_3\left(\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{7}{16}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 = \frac{\pi}{128}$$

V_n $(n \geqq 1)$ は $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ の区間にある 2^{n-1} 個の三角形 $\left(\text{面積 } S_n = \dfrac{1}{4^{n+1}}\right)$ を $x = \dfrac{1}{2}$ の周りに 1 回転させると

$$V_n = 2\pi S_n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{4^{n+1}} \cdot \frac{(2^{n-1})^2}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+4}}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
V &= V_0 + \sum_{n=1}^{N} V_n \\
&= \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^N}{1-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48} - \frac{\pi}{2^{N+4}}}
\end{aligned}
$$

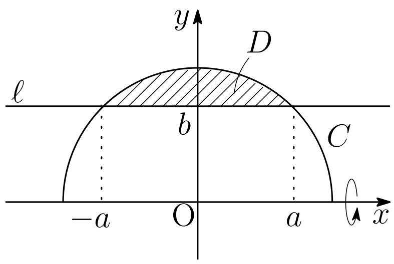
(2) (1) の結果から

$$\lim_{N\to\infty} V = \boldsymbol{\frac{5\pi}{48}}$$

補足 $y = \displaystyle\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{s(2^n x)}{2^n}$ は連続関数であるが，至るところで微分不可能な曲線 (**高木曲線**) として有名である．

パップス・ギュルダンの定理[1] の応用例をもう 1 つ解説します．

半円 $C : x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ $(y \geqq 0)$ と直線 $\ell : y = b$ $(b \geqq 0)$ で囲まれた領域を D とし，D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると



$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-a}^{a}(y^2 - b^2)\,dx \\
&= \pi\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\,dx = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi a^3} \qquad \text{(A)}
\end{aligned}
$$

V は，b に関係なく (C の半径に関係なく)，a の値により決定する．球の体積の公式と関連して覚えるとよい．実際，a が C の半径と一致するとき，球の体積である．

D の面積を S とすると，パップス・ギュルダンの定理により，D の重心は

$$\left(0,\ \frac{V}{2\pi S}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(0,\ \frac{2a^3}{3S}\right) \qquad (*)$$

この結果を使うと，次の問題を積分せずに求めることができます．

2012 年 九大理系

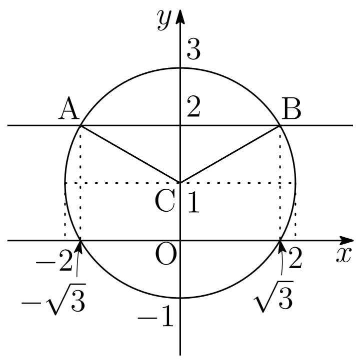
円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6)

解答　D_1，D_2 の領域を次のようにとる．

$$D_1 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ y \geqq 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} x^2+(y-1)^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

D_1，D_2 の面積をそれぞれ S_1，S_2 とする．
右図において，$\angle \mathrm{ACB} = \dfrac{2\pi}{3}$ であるから



$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$$
$$S_2 = \pi\cdot 2^2 - 2S_1 = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

D_1 の重心 G_1 は，$(*)$ の重心を y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである．また D_2 の重心 G_2 は，図形の対称性に注意すると

$$\mathrm{G}_1\left(0,\ \frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right),\quad \mathrm{G}_2(0,\ 1)$$

よって，求める回転体の体積を V とすると

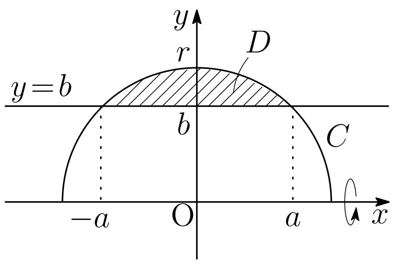
$$\begin{aligned} V &= 2\pi S_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{S_1}+1\right) + 2\pi S_2\cdot 1 \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+S_1+S_2\right) \\ &= 2\pi\left(2\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) \\ &= \boldsymbol{2\pi\left(3\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi\right)} \end{aligned}$$

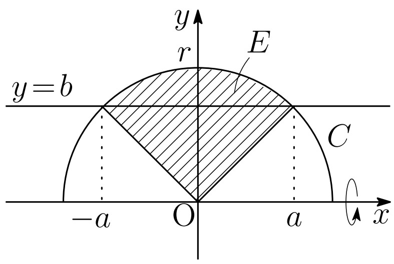
次の結果は，求積問題おいて利用する場面が多く，非常に便利です．

三日月形・扇形の回転体の体積

下の図の斜線部分 D，E を x 軸の周りに 1 回転された回転体の体積をそれぞれ V_D，V_E とすると

$$\boldsymbol{V_D = \frac{4}{3}\pi a^3}, \qquad \boldsymbol{V_E = \frac{4}{3}\pi r^2 a}$$





証明 V_D は (A) で証明済 (a だけで求まることが面白い)．

E の下側の三角形の面積は ab，重心は $\left(0,\ \dfrac{2b}{3}\right)$ であるから，パップス・ギュルダンの定理により

$$\begin{aligned} V_E &= V_D + 2\pi \cdot ab \cdot \frac{2b}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3 + \frac{4}{3}\pi ab^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi(a^2+b^2)a = \frac{4}{3}\pi r^2 a \end{aligned}$$

別証 (定積分を用いる解法)

$$\begin{aligned} \frac{V_E}{2\pi} &= \int_0^a \left\{(r^2 - x^2) - \left(\frac{b}{a}x\right)^2\right\} dx = \left[\ r^2 x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{b^2}{3a^2}x^3\ \right]_0^a \\ &= r^2 a - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}ab^2 = r^2 a - \frac{1}{3}(a^2+b^2)a \\ &= r^2 a - \frac{1}{3}r^2 a = \frac{2}{3}r^2 a \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V_E = \dfrac{4}{3}\pi r^2 a}$　　**証終**

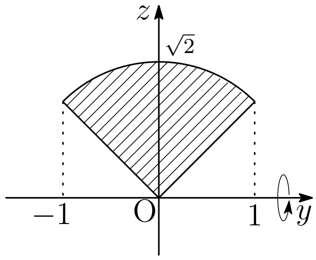
喜劇アニメ「トムとジェリー」で猫のトムが投げ飛ばされて，壁にトムの輪郭が残る場面を小さい頃よく目にしました．数学の回転の体積も壁にできた輪郭を利用して計算することも可能です．次の阪大の問題では，円すいを回転させて yz 平面 (壁) にできた輪郭 (扇形) を回転させた立体の体積として求めることができます．

2013 年 阪大理系

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$



2017 年 東大理系

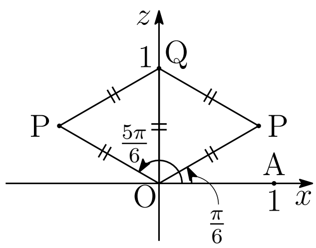
点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，$\angle$AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

解答 (1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x = \cos\theta$ であるから

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}}, \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上の点 (0, 0, 1) にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x = 0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x = 0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．よって，求める K の体積 V は

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$