令和３度　京都大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

1 次の各問に答えよ．

(1) 10 進法で表された数 6.75 を 2 進数で表せ．また，この数と 2 進数で表された数 101.0101 との積として与えられる数を 2 進数および 4 進法で表せ．

(2) $\triangle$OAB において OA $= 3$，OB $= 2$，$\angle$AOB $= 60^\circ$ とする．$\triangle$OAB の垂心を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

2 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right|dx$ を求めよ．

3 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの番号が付いた n 個の箱があり，それぞれの箱には赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている．このとき操作 $(*)$ を $k=1,\cdots,n-1$ に対して，k が小さい方から順に 1 回ずつ行う．

$(*)$ 番号 k の箱から玉を取り出し，番号 $k+1$ の箱に入れてよくかきまぜる．

一連の操作がすべて終了した後，番号 n の箱から玉を 1 個取り出し，番号 1 の箱に入れる．このとき番号 1 の箱に赤玉と白玉が 1 個ずつ入っている確率を求めよ．

4 空間の 8 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\ \mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(1,\ 2,\ 0),\ \mathrm{C}(0,\ 2,\ 0)$$
$$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 3),\ \mathrm{E}(1,\ 0,\ 3),\ \mathrm{F}(1,\ 2,\ 3),\ \mathrm{G}(0,\ 2,\ 3)$$

を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える．点 O，点 F，辺 AE 上の点 P，および辺 CG 上の点 Q の 4 点が同一平面上にあるとする．このとき，四角形 OPFQ の面積 S を最小にするような点 P および点 Q の座標を求めよ．また，そのときの S の値を求めよ．

5 p が素数ならば p^4+14 は素数でないことを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $6.75 = 4 + 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = 2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} = \mathbf{110.11_{(2)}}$

$101.0101_{(2)} = 2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4}$

$a = 2$ とおくと

$$\begin{aligned}
2^2 + 2 + 2^{-1} + 2^{-2} &= a^2 + a + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} \\
&= a(a+1) + \frac{a+1}{a^2} = (a+1)\left(a + \frac{1}{a^2}\right) \\
&= \frac{1}{a^2}(a+1)(a^3+1) \\
2^2 + 1 + 2^{-2} + 2^{-4} &= a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} \\
&= a^2 + 1 + \frac{a^2+1}{a^4} = (a^2+1)\left(1 + \frac{1}{a^4}\right) \\
&= \frac{1}{a^4}(a^2+1)(a^4+1)
\end{aligned}$$

$a^2 - 1 = a + 1$ に注意すると，上の 2 数の積を A とすると

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{a^6}(a+1)(a^3+1)(a^2+1)(a^4+1) \\
&= \frac{1}{a^6}(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)(a^3+1) \\
&= \frac{1}{a^6}(a^8-1)(a^3+1) = \frac{1}{a^6}(a^{11} + a^8 - a^3 - 1)
\end{aligned}$$

$a^8 - 1 = a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{a^6}(a^{11} + a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^2 + a + 1) \qquad (*) \\
&= a^5 + a + 1 + a^{-1} + a^{-2} + a^{-4} + a^{-5} + a^{-6}
\end{aligned}$$

また，$(*)$ において，$b = a^2$ とおくと

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{b^3}(2b^5 + 2b^3 + b^3 + 2b^2 + b^2 + b + 2 + 1) \\
&= \frac{1}{b^3}(2b^5 + 3b^3 + 3b^2 + b + 3) \\
&= 2b^2 + 3 + 3b^{-1} + b^{-2} + 3b^{-3}
\end{aligned}$$

求める 2 進数表示および 4 進数表示は

$$\mathbf{100011.110111_{(2)}}, \quad \mathbf{203.313_{(4)}}$$

(2) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ より，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ=3$$

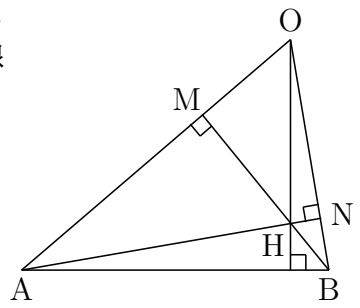
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくと (x, y は実数)，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}\\&=x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=3x+4y-3=0\quad\cdots①\\\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{b})\cdot\vec{a}\\&=x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=9x+3y-3=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

①，② を解いて　　$x=\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{2}{3}$

したがって　　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}=\boldsymbol{\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

別解 $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ より，2 点 A，B からそれぞれ OB，OA に垂線 AN，BM を引くと



$$\mathrm{OM}=1,\quad \mathrm{ON}=\frac{3}{2}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと (x, y は実数)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3x\overrightarrow{\mathrm{OM}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{4}{3}y\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

H は直線 MB および NA 上の点であるから

$$3x+y=x+\frac{4}{3}y=1\quad\text{これを解いて}\quad x=\frac{1}{9},\ y=\frac{2}{3}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - x - 2) = \frac{1}{2}(2x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

とおくと，求める定積分は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) - \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \\ &= \Big[\ F(x)\ \Big]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{-\frac{1}{2}}^{1} \\ &= 2F\left(-\frac{1}{2}\right) - F(1) - F(-1) \\ &= 2\cdot\frac{7}{48} - \left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right) = \mathbf{\frac{19}{24}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 番号 k の箱から取り出した玉の色が番号 1 の箱から取り出した玉の色と同じである確率を p_k とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$p_1 = 1, \quad p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

したがって　$p_{k+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}\left(p_k - \dfrac{1}{2}\right)$　ゆえに　$p_k - \dfrac{1}{2} = \left(p_1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

すなわち　$p_k = \dfrac{1}{2}\left\{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}\right\}$

求める確率は，番号 n の箱から取り出した玉の色が番号 1 の箱から取り出した玉の色と同じである確率 p_n と一致するから

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}$$

4 平面 AODE//平面 BCGF より

$$\mathrm{OP}/\!/\mathrm{QF} \quad \cdots ①$$

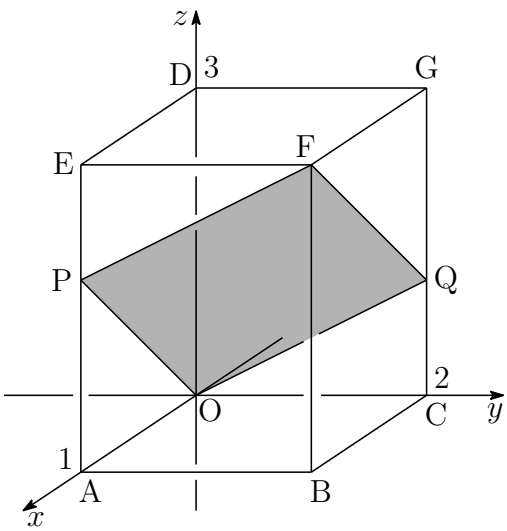
平面 OCGD//平面 ABFE より

$$\mathrm{OQ}/\!/\mathrm{PF} \quad \cdots ②$$

①，② より，四角形 OPFQ は，平行四辺形である．P は辺 AE 上の点であるから

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ t) \quad (0 \leqq t \leqq 3)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{QF}}$ より



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1,\ 2,\ 3) - (1,\ 0,\ t) = (0,\ 2,\ 3-t)$

このとき，Q は辺 CG の点であるから

$$0 \leqq 3 - t \leqq 3 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq t \leqq 3$$

平行四辺形 OPFQ の面積 S は

$$\begin{aligned} S^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2 \\ &= (1+t^2)\{2^2 + (3-t)^2\} - \{t(3-t)\}^2 \\ &= 4 + 4t^2 + (3-t)^2 \\ &= 5t^2 - 6t + 13 \\ &= 5\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{56}{5} \end{aligned}$$

$t = \dfrac{3}{5}$，すなわち，$\mathbf{P}\left(\mathbf{1, 0, \dfrac{3}{5}}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0,\ 2,\ \dfrac{12}{5}}\right)$ のとき，S は最小値 $\mathbf{2\sqrt{\dfrac{14}{5}}}$

5 (i) $p = 3$ のとき　$p^4 + 14 = 3^4 + 14 = 95 = 5\cdot 19$

(ii) p が 3 以外の素数のとき　$p \equiv \pm 1 \pmod 3$

$$p^4 + 14 \geqq 2^4 + 14 = 30, \quad p^4 + 14 \equiv 15 \equiv 0 \pmod 3$$

よって，p が素数ならば，$p^4 + 14$ は素数でない．