令和３年度　東北大学２次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文，教育，法，経済，医 (保健 [看護]))

1 $a,\ b$ を実数とする．曲線 $y = ax^2 + bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないような点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ．

2 正八角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdots \mathrm{A}_8$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形であるものの個数を求めよ．

(2) 3 個の頂点を結んでできる三角形のうち，直角三角形でも二等辺三角形でもないものの個数を求めよ．

(3) 4 個の頂点を結んでできる四角形のうち，次の条件 $(*)$ を満たすものの個数を求めよ．

$(*)$　四角形の 4 個の頂点から 3 点を選んで直角三角形を作れる．

3 平面において，2 つの点 O，A の間の距離が 1 であるとし，点 O と点 A を中心とする 2 つの円をそれぞれ C_1，C_2 とする．C_1，C_2 は 2 点 P，Q において交わり，$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{3}$ であるとし，C_2 の半径 r は $r < 1$ を満たすとする．以下の問いに答えよ．

(1) C_1 の半径を求めよ．

(2) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，$\angle\mathrm{PAO}$ の大きさを求めよ．

(3) $r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，円 C_1 の内部と円 C_2 の内部との共通部分の面積を求めよ．

4 以下の問いに答えよ．

(1) 3 次関数 $y = x^3 + x^2$ のグラフと 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフの共通接線 (どちらのグラフにも接する直線) は 2 本ある．それらの方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた 2 本の共通接線と 2 次関数 $y = x^2 + 4x + 16$ のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = ax^2 + bx + 1$ とおくと，曲線 $y = f(x)$ は，点 $(0,\ 1)$ を通る．

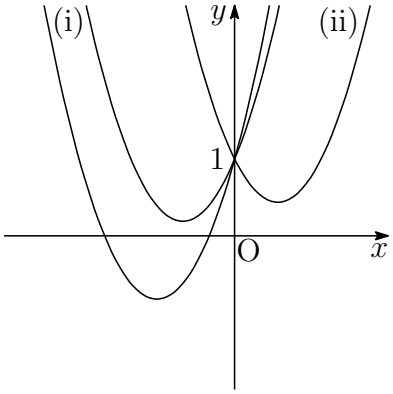
$a < 0$ のとき，上に凸の放物線 $y = x(x)$ は x 軸の正の部分と共有点をもつ．

したがって，$a \geqq 0$ であることが必要である．

［1］$a = 0$ のとき，直線 $y = bx + 1$ が x 軸の正の部分と共有点をもたないから

$$b \geqq 0$$

［2］$a > 0$ のとき，$f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + 1 - \dfrac{b^2}{4a}$ より，放物線 $y = f(x)$ の頂点に着目すると，条件を満たすのは，次の (i) または (ii) である．

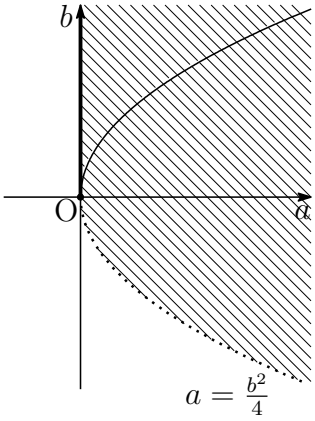


(i) $-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$

(ii) $-\dfrac{b}{2a} > 0,\ 1 - \dfrac{b^2}{4a} > 0$

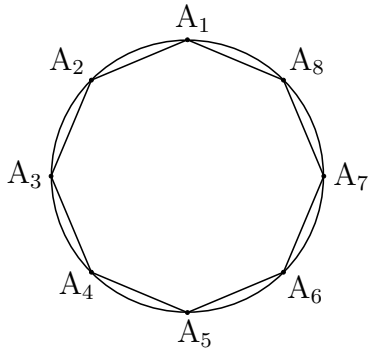
すなわち　(i) $b \geqq 0$　(ii) $b < 0,\ a > \dfrac{a^2}{4}$

［1］,［2］より，求める領域は，下の図の斜線部分で，点線部分は含まない．



2 (1) 直角三角形の斜辺は，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 の 4 通りあり，それぞれの斜辺に対する頂点の選び方が 6 通りある．よって，求める個数は

$$4 \times 6 = \mathbf{24}\ (\text{個})$$



(2) A_1 を挟む 2 辺が等しい二等辺三角形で直角三角形でないものが $\triangle A_1A_2A_8$，$\triangle A_1A_5A_6$ の 2 個あるから，二等辺三角形で直角三角形でないものの総数は

$$2 \times 8 = 16\ (\text{個})$$

(1) と上の結果から，直角三角形または二等辺三角形であるものの個数は

$$24 + 16 = 40\ (\text{個})$$

3 個の頂点を結んでできる三角形の総数は　${}_8C_3 = 56$ (個)

よって，求める個数は　　$56 - 40 = \mathbf{16}$ **(個)**

(3) 直角三角形の斜辺となるのは，A_1A_5，A_2A_6，A_3A_7，A_4A_8 であるから，直角三角形とならないのは，A_1 と A_5，A_2 と A_6，A_3 と A_7，A_4 と A_8 をともに含まない場合である．直角三角形とならない 4 点の選び方は

$$\{A_1,\ A_5\},\ \{A_2,\ A_6\},\ \{A_3,\ A_7\},\ \{A_4,\ A_8\}$$

の 4 組からそれぞれ 1 つずつ選ぶ場合の数　2^4 (個)

よって，求める場合の数は

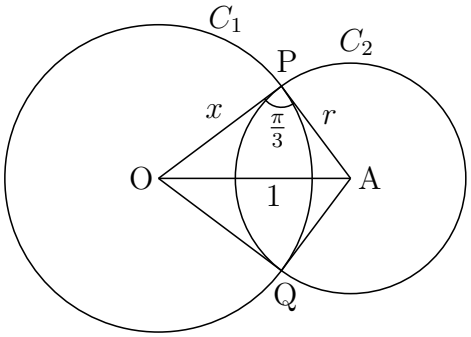
$${}_8C_4 - 2^4 = 70 - 16 = \mathbf{54}\ (\text{個})$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) OA $= 1$，AP $= r$ $(r < 1)$，$\angle$OPA $= \dfrac{\pi}{3}$ であるから，OP $= x$ とおいて，△OAP に余弦定理を適用すると

$$1^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - rx + r^2 - 1 = 0$$

$r < 1$ より，この方程式が正・負の解をもつことに注意して

$$x = \boldsymbol{\frac{r + \sqrt{4 - 3r^2}}{2}}$$



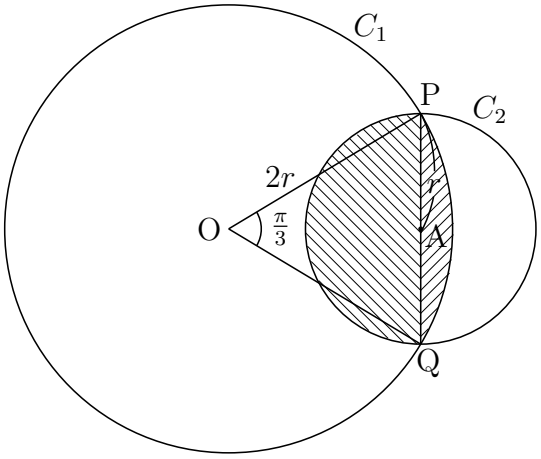
(2) (1) の結果に $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると　$x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\theta = \angle$OAP とおいて，正弦定理に適用すると

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3} = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

(3) $r = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$．(2) の結果から，求める面積は

$$\frac{\pi}{2}r^2 + \frac{1}{2}(2r)^2\left(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right) = r^2\left(\frac{7}{6}\pi - \sqrt{3}\right) = \boldsymbol{\frac{7\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{3}}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y = x^3 + x^2$ より　$y' = 3x^2 + 2x$

$y = x^3 + x^2$ 上の点 $(t,\ t^3 + t^2)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 \ \ (*)$$

この直線と放物線 $y = x^2 + 4x + 16$ が接するから，これらの方程式から y を消去した 2 次方程式

$$x^2 + 4x + 16 = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2$$

すなわち，2 次方程式

$$x^2 - (3t^2 + 2t - 4)x + 2t^3 + t^2 + 16 = 0 \qquad (**)$$

が重解をもつから，その係数について

$$(3t^2 + 2t - 4)^2 - 4{\cdot}1(2t^3 + t^2 + 16) = 0$$

これを整理すると

$$9t^4 + 4t^3 - 24t^2 - 16t - 48 = 0$$
$$(t + 2)(t - 2)(9t^2 + 4t + 12)$$

$9t^2 + 4t + 12 = (t + 2)^2 + 8(t^2 + 1) > 0$ に注意して解くと　$t = \pm 2$

求める 2 接線は，$t = 2, -2$ をそれぞれ $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{y = 16x - 20,\ y = 8x + 12}$$

(2) $(**)$ より，放物線 $y = x^2 + 4x + 16$ と接線 $(*)$ の接点の x 座標は

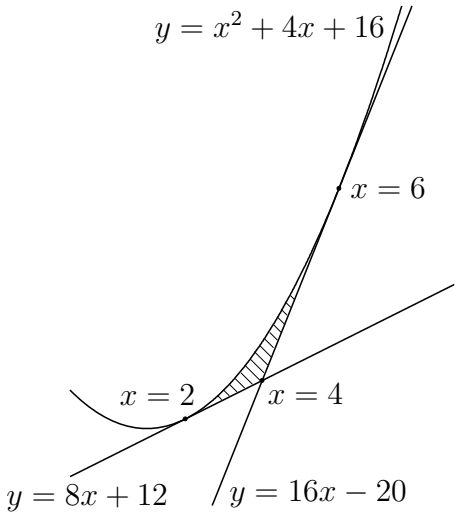
$$x = \frac{3t^2 + 2t - 4}{2}$$

したがって，$t = 2$ のとき $x = 6$，$t = -2$ のとき $x = 2$

また，2 接線の交点の x 座標は

$$16x - 20 = 8x + 12 \quad \text{これを解いて} \quad x = 4$$

以上の結果から，求める面積は下の図の斜線部分である．



求める面積を S とすると [1]

$$
\begin{aligned}
S &= \int_2^4 \{(x^2 + 4x + 16) - (8x + 12)\}\, dx \\
&\qquad\qquad + \int_4^6 \{(x^2 + 4x + 16) - (16x - 20)\}\, dx \\
&= \int_2^4 (x-2)^2\, dx + \int_4^6 (x-6)^2\, dx \\
&= \left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_2^4 + \left[\ \frac{1}{3}(x-6)^3\ \right]_4^6 = \mathbf{\frac{16}{3}}
\end{aligned}
$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf (p.6 を参照)