令和３年度　琉球大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・農・教育学部　令和 3 年 2 月 25 日

- 理・工・医・教育 [数学] 学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農・教育 (学校教育 [教育実践学・技術・特別支援]，生涯教育 [自然環境科学]) 学部は，$\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (60 分)

1 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 7$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ を解け．

(2) $f(x)$ が $x = \alpha,\ \beta$ (ただし$\alpha < \beta$) で極値をとるとき，α と β を求めよ (極値を求める必要はない)．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる領域のうち，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ を満たす部分の面積を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\quad a_{n+1} = 2e^{-a_n} - 1 + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める．次の問いに答えよ．次の問いに答えよ．ただし，$2 < e < 3$ であることは証明なしに用いてよい．

(1) $f(x) = e^{-x} - 1 + x$ とする．$0 < x < 1$ のとき，不等式

$$0 < f(x) < \frac{2}{3}x$$

が成り立つことを示せ．

(2) $b_n = a_n - \log 2$ とする．すべての正の整数 n について $0 < b_n < 1$ となることを，数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3 xy 平面上で，極方程式

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta}$$

により与えられる曲線 C を考える．次の問いに答えよ．

(1) 曲線 C の概形を図示せよ．

(2) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし，曲線 C 上の，極座標が $(r,\ \theta)$ である点 P を考える．点 P における曲線 C の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であることを示せ．

(3) (2) の点 P から y 軸に下ろした垂線と y 軸との交点を H，原点を O とする．$\angle$OPH の二等分線と，点 P における曲線 C の接線は直交することを示せ．

4 袋 A には赤玉が 1 個と白玉が 2 個，袋 B には赤玉が 3 個と白玉が 2 個入っている．袋 B から玉を 2 個取り出して袋 A に入れ，よく混ぜてから，袋 A から玉を 1 個取り出して，色を見てから袋 A に戻す．さらに，よく混ぜてから，もう一度袋 A から玉を 1 個取り出す．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 袋 B に白玉がちょうど 1 個残っている確率を求めよ．

(2) 袋 A から最初に取り出す玉が白玉である確率を求めよ．

(3) 袋 A から二度とも白玉を取り出す確率を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(x^2+y^2-2)(y-x^2) > 0$ の表す領域を図示せよ．

(2) 15334 と 30381 の最大公約数を求めよ．

(3) 方程式 $2^x - (\sqrt{2})^{x+1} - 4 = 0$ を解け．

6 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ について，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ の極値を調べ，そのグラフをかけ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ について，傾きが 9 で y 切片が正である接線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $(*)$ $f(x)=2x^3-3x^2-6x+7$ について，$f(1)=0$ であるから，因数定理により，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$f(x)=(x-1)(2x^2-x-7)$$

したがって，$f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{57}}{4}}$

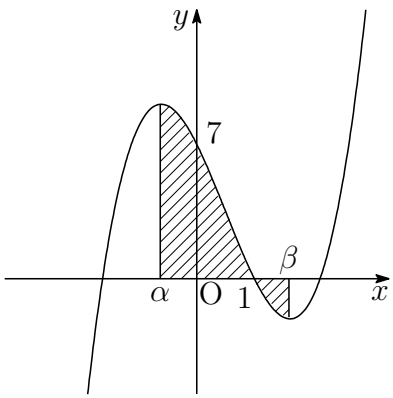
(2) $(*)$ を微分すると　$f'(x)=6x^2-6x-6=6(x^2-x-1)$

$f'(x)=0$ を解くと　　$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$$f'(x)=6\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

ゆえに，$f(x)$ は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ で極値をとる．

よって　　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$



(3) $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^3-3x^2+7x$ とおく．

求める面積は上の図の斜線部分でその面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^1 f(x)\,dx-\int_1^\beta f(x)\,dx=\Big[\ F(x)\ \Big]_\alpha^1-\Big[\ F(x)\ \Big]_1^\beta\\&=2F(1)-\{F(\alpha)+F(\beta)\}\\&=2\cdot\frac{7}{2}-\frac{1}{2}(\alpha^4+\beta^4)+(\alpha^3+\beta^3)+3(\alpha^2+\beta^2)-7(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ここで，$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ より

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot(-1)=3\\\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot(-1)\cdot1=4\\\alpha^4+\beta^4&=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=3^2-2\cdot1^2=7\end{aligned}$$

よって　$S=7-\dfrac{1}{2}\cdot7+4+3\cdot3-7\cdot1=\boldsymbol{\dfrac{19}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=e^{-x}-1+x$ より　$f'(x)=-e^{-x}+1$

$0<x<1$ において，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は単調増加

$$f(0)<f(x) \quad \text{すなわち} \quad 0<f(x) \quad \cdots ①$$

次に，$g(x)=\dfrac{2}{3}x-f(x)=-e^{-x}-\dfrac{1}{3}x+1$ とおくと

$$g'(x)=e^{-x}-\frac{1}{3}$$

$0<x<1$ において，$g'(x)>0$ であるから，$g(x)$ は単調増加

$$g(0)<g(x) \quad \text{すなわち} \quad 0<g(x)=\frac{2}{3}x-f(x) \quad \cdots ②$$

①，② より，$0<x<1$ において　$0<f(x)<\dfrac{2}{3}x \quad \cdots (*)$

(2) $a_n=b_n+\log 2$ を $a_{n+1}=2e^{-a_n}-1+a_n$ に代入すると

$$b_{n+1}+\log 2=2e^{-b_n-\log 2}-1+b_n+\log 2$$

整理すると　$b_{n+1}=e^{-b_n}-1+b_n$　すなわち　$b_{n+1}=f(b_n)$

$b_1=a_1-\log 2=1-\log 2=\log\dfrac{e}{2}$　ゆえに　$0<b_1<1$

$0<b_k<1$ と仮定すると，(1) の結果から

$$0<f(b_k)<\frac{2}{3}b_k \quad \text{すなわち} \quad 0<b_{k+1}<\frac{2}{3}<1$$

$0<b_1<1$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n について

$$0<b_n<1$$

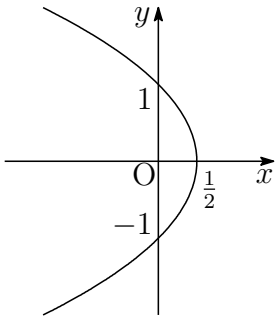
(3) (2) の結果を $(*)$ に代入すると　$0<b_{n+1}<\dfrac{2}{3}b_n$

$$0<b_n<b_1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty} b_n=0$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n+\log 2)=\mathbf{log\,2}$

3 (1) $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ より

$$r + r\cos\theta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r = 1 - x$$



両辺を平方すると

$$x^2 + y^2 = 1 - 2x + x^2$$

よって　$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果の両辺を x で微分すると　$1 = -yy'$　$\cdots$①

$y = r\sin\theta$ および $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ から　$y = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$　$\cdots$②

② を ① に代入すると　$1 = -\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}y'$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta \neq 0$ に注意して　$y' = -\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

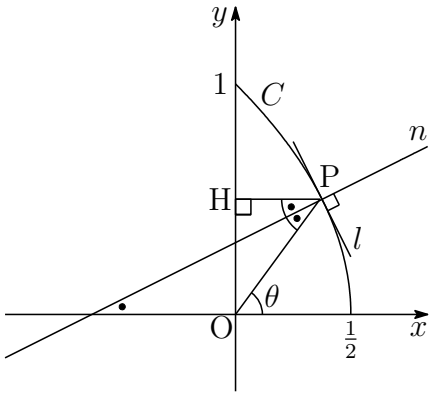
(3) C 上の点 P における接線 l の傾きは，(2) で求めた

$$-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

直線 OP の偏角が θ であるから，$\angle$OPH の二等分線 n とすると，その偏角が $\dfrac{\theta}{2}$ であるから，n の傾きは

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

求めた l と n の傾きの積が -1 であるから，これらの直線は直交する．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 求める確率は，袋Bから赤玉1個と白玉1個を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1 \cdot {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3 \cdot 2}{10} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

(2) (i) 袋Bから赤玉2個を取り出す確率を p とすると

$$p = \frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{3}{10}$$

このとき，袋Aには赤玉3個と白玉2個になるから，袋Aから1個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\frac{2}{5}$

(ii) (1) で求めた袋Bから赤玉1個と白玉1個を取り出す確率を q とする．

$$q = \frac{6}{10}$$

このとき，袋Aには赤玉2個と白玉3個になるから，袋Aから1個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\frac{3}{5}$

(iii) 袋Bから白玉2個を取り出す確率を r とすると

$$r = \frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \frac{1}{10}$$

このとき，袋Aには赤玉1個と白玉4個になるから，袋Aから1個玉を取り出したとき，白玉である確率は $\frac{4}{5}$

よって，求める確率は

$$p \cdot \frac{2}{5} + q \cdot \frac{3}{5} + r \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{50} = \mathbf{\frac{14}{25}}$$

(3) (2) と同様にして

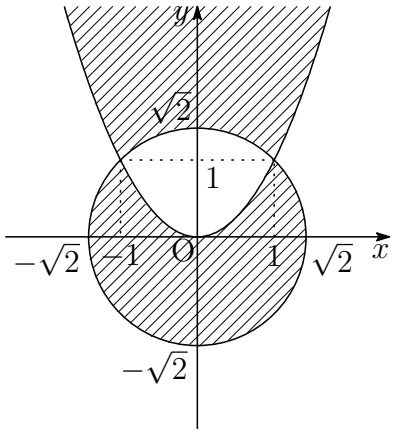
$$\begin{aligned} p\left(\frac{2}{5}\right)^2 + q\left(\frac{3}{5}\right)^2 + r\left(\frac{4}{5}\right)^2 &= \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{6}{10}\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{10}\left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ &= \frac{84}{250} = \mathbf{\frac{41}{125}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(x^2+y^2-2)(y-x^2)>0$ より

$$\begin{cases} x^2+y^2-2>0 \\ y-x^2>0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} x^2+y^2-2<0 \\ y-x^2<0 \end{cases}$$

すなわち $\begin{cases} x^2+y^2>2 \\ y>x^2 \end{cases}$ または $\begin{cases} x^2+y^2<2 \\ y<x^2 \end{cases}$

よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



(2) ユークリッドの互除法により

$$\begin{aligned} 30381 &= 15334\times 1+15047 \\ 15334 &= 15047\times 1+287 \\ 15047 &= 287\times 52+123 \\ 287 &= 123\times 2+41 \\ 123 &= 41\times 3 \end{aligned}$$

よって，求める最大公約数は　**41**

(3) 方程式 $2^x-(\sqrt{2})^{x+1}-4=0$ より　$(\sqrt{2})^{2x}-\sqrt{2}(\sqrt{2})^x-4=0$

$t=(\sqrt{2})^x$ とおくと $(t>0)$　　$t^2-\sqrt{2}t-4=0$

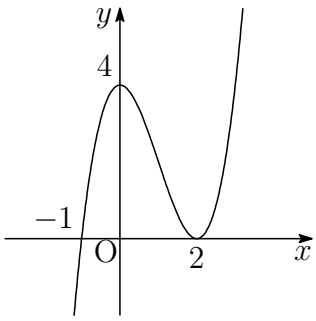
$(t+\sqrt{2})(t-2\sqrt{2})=0$　ゆえに　$t=2\sqrt{2}$

したがって　$(\sqrt{2})^x=(\sqrt{2})^3$　よって　$\boldsymbol{x=3}$

6 (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



よって　極大値 $f(0) = \mathbf{4}$
　　極小値 $f(2) = \mathbf{0}$

(2) $f'(x) = 9$ より　$3x^2 - 6x = 9$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = -1,\ 3$$

(1) で求めたグラフから，接線の傾きが 9 で y 切片が正であるのは，点 $(-1,\ 0)$ を通る直線である．

$$y - 0 = 9(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 9x + 9}$$

(3) (2) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ のグラフの共有点の x 座標は

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 9x + 9 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)^2(5-x) = 0$$

これを解いて　$x = -1,\ 5$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{5} \{9x + 9 - (x^3 - 3x^2 + 4)\} \\ &= \int_{-1}^{5} (x+1)^2(5-x)\,dx \\ &= \frac{1}{12}\{5 - (-1)\}^4 = \mathbf{108} \end{aligned}$$

補足 積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照.