令和３年度　佐賀大学２次試験前期日程 (数学問題)
理工・医・農・教育学部　令和３年２月25日

- 理工学部は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 農学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 教育学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・A・B (100 分)

1 $\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{AC}=4$，$\cos B=\dfrac{3}{4}$ をみたす $\triangle\mathrm{ABC}$ について，次の問に答えよ．

(1) 辺 BC の長さを求めよ．

(2) $\angle\mathrm{C}$ が鋭角のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ．

(3) (2) の $\triangle\mathrm{ABC}$ に対して，その外接円および内接円の半径をそれぞれ求めよ．

2 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) α^2 と α^3 の値をそれぞれ求めよ．

(2) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ を，それぞれ有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ の形に表せ．

(3) $\dfrac{1}{\alpha+1}$ を，有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d$ の形に表せ．

(4) (1)，(2)，(3) で示した式のいずれかを用いることにより，α が有理数または無理数のどちらになるか，理由をつけて答えよ．ただし，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

3 ベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,-1)$ のとき

$$\vec{p}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$
$$\vec{q}=(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}$$

とおく．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|^2$，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{b}|^2$ の値をそれぞれ求め，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を θ を用いて表せ．

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．また，内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を t を用いて表せ．

(3) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値をそれぞれ求めよ．

4 $f(x) = -x^3 + 4x$ とおく．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とする．ただし，$0 < t < 2$ とする．$y = f(x)$ $(t \leqq x \leqq 2)$，x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とする．$y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq t)$，直線 ℓ，および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とし，$S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $S_1(t)$ を t を用いて表せ．

(3) $S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(4) t が $0 < t < 2$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ．

5 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ を，それぞれ有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ の形に表せ．

(2) $\dfrac{1}{\alpha + 1}$ を，有理数 $a,\ b,\ c,\ d$ を用いて $a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$ の形に表せ．

(3) (1)，(2) で示した式のいずれかを用いることにより，α が有理数または無理数のどちらになるか，理由をつけて答えよ．ただし，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ が無理数であることは用いてもよい．

6 $f(x) = 2x^2 + x + 1$ とおき，放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 4)$ における接線を ℓ とする．点 P を通り，ℓ とのなす角が 45° である直線で，傾きが正であるものを m とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 直線 m の方程式を求めよ．

(3) $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，直線 m，および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $b=4,\ c=6,\ \cos B=\dfrac{3}{4}$ を余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ に代入すると

$$16=36+a^2-2\cdot 6a\cdot\frac{3}{4}\quad \text{ゆえに}\quad a^2-9a+20=0$$

したがって　$(a-4)(a-5)=0$　よって　$\mathrm{BC}=a=\mathbf{4,\ 5}$

(2) $\angle\mathrm{C}$ が鋭角であるから，$a^2+b^2>c^2$ をみたすとき，(1) の結果から

$$a=5$$

また　$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{7}}{4}}$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円および内接円の半径をそれぞれ $R,\ r$ とおく．

正弦定理により　$2R=\dfrac{b}{\sin B}$

$$R=\frac{b}{2\sin B}=\frac{4}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}}=\frac{8}{\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{8}{7}\sqrt{7}}$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ の周の長さを ℓ とすると　$\ell=5+4+6=15$

これと (2) の結果を $\dfrac{1}{2}r\ell=\triangle\mathrm{ABC}$ に代入すると

$$\frac{1}{2}r\cdot 15=\frac{15\sqrt{7}}{4}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{r=\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ より

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = \mathbf{5 + 2\sqrt{6}},\\ \alpha^3 &= \alpha^2\alpha = (5+2\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})\\ &= 5(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = \mathbf{11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(2) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$，$\alpha^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$ より

$$\boldsymbol{\sqrt{2} = \frac{1}{2}(\alpha^3 - 9\alpha), \quad \sqrt{3} = \frac{1}{2}(-\alpha^3 + 11\alpha)}$$

$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ より　$\boldsymbol{\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5)}$

$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ の両辺を平方すると

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 24 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$$

$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1$ を $\alpha + 1$ で割ることにより

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = (\alpha+1)(\alpha^3 - \alpha^2 - 9\alpha + 9) - 8$$

上式の左辺は 0 であるから　$8 = (\alpha+1)(\alpha^3 - \alpha^2 - 9\alpha + 9)$

よって　$\boldsymbol{\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{8}(\alpha^3 - \alpha^2 - 9\alpha + 9)}$

別解 (2) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\ &= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})\\ &= \frac{1}{4}\left(2 + \frac{\alpha^3 - 9\alpha}{2} - \frac{\alpha^2 - 5}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{8}(\alpha^3 - \alpha^2 - 9\alpha + 9)}\end{aligned}$$

(3)　$\sqrt{6} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5) \quad \cdots (*)$

α を有理数と仮定すると，$(*)$ の右辺は有理数であり，左辺が無理数であることに反する．よって，α は無理数である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}=(1,\ 3),\ \vec{b}=(3,-1)$ より

$$|\vec{a}|^2=1^2+3^2=\mathbf{10},\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot3+3\cdot(-1)=\mathbf{0},\quad |\vec{b}|^2=3^2+(-1)^2=\mathbf{10}$$

したがって

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\}\cdot\{(\cos^2\theta)\vec{a}+(\sin^2\theta)\vec{b}\}\\&=(\cos^3\theta)|\vec{a}|^2+(\sin^3\theta)|\vec{b}|^2\\&=\boldsymbol{10(\sin^3\theta+\cos^3\theta)}\end{aligned}$$

(2) $(*)$ $t=\sin\theta+\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ より

$$(**)\quad t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}}$$

また，$(*)$ の両辺を平方すると

$$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta\quad \text{ゆえに}\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$$

$(*)$ と上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=10(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\\&=10(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=10t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=\boldsymbol{-5t^3+15t}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果から，$f(t)=\vec{p}\cdot\vec{q}$ とおくと $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$$f'(t)=-15t^2+15=-15(t+1)(t-1)$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-5\sqrt{2}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	10	$\searrow$	$5\sqrt{2}$

$(**)$ より $t=1$ すなわち $\boldsymbol{\theta=0,\ \frac{\pi}{2}}$ のとき 最大値 $\mathbf{10}$

$t=-1$ すなわち $\boldsymbol{\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi}$ のとき 最小値 $\mathbf{-10}$

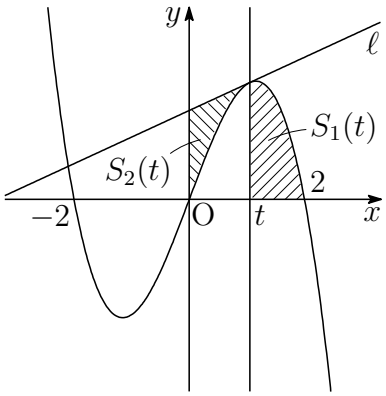
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = -x^3 + 4x$ より　$f'(x) = -3x^2 + 4$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y - (-t^3 + 4t) = (-3t^2 + 4)(x - t)$$

したがって　$\boldsymbol{y = (-3t^2 + 4)x + 2t^3}$

(2) $S_1(t)$ は右の図の斜線部分の面積であるから



$$\begin{aligned} S_1(t) &= \int_t^2 (-x^3 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_t^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{4}t^4 - 2t^2 + 4} \end{aligned}$$

(3) $S_2(t)$ は右上の図の斜線部分の面積であるから，(1) の結果により

$$\begin{aligned} S_2(t) &= \int_0^t \{(-3t^2 + 4)x + 2t^3 - (-x^3 + 4x)\}\,dx \\ &= \int_0^t (x^3 - 3t^2x + 2t^3)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t^3x \right]_0^t = \boldsymbol{\frac{3}{4}t^4} \end{aligned}$$

(4) (2)，(3) の結果から

$$\begin{aligned} S(t) = S_1(t) + S_2(t) &= \frac{1}{4}t^3 - 2t^2 + 4 + \frac{3}{4}t^3 \\ &= t^4 - 2t^2 + 4 \\ &= (t^2 - 1)^2 + 3 \end{aligned}$$

$0 < t < 2$ より，$\boldsymbol{t = 1}$ のとき，最小値 $\mathbf{3}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{2}$ (2) と同一

(2) $\boxed{2}$ (3) と同一

(3) $\boxed{2}$ (4) と同一

6 (1) $f(x)=2x^2+x+1$ より　$f'(x)=4x+1$

したがって　$f(1)=4,\ \ f'(1)=5$

ℓ は点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き 5 の直線であるから

$$y-4=5(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=5x-1}$$

(2) 直線 ℓ の偏角を θ とすると，$\tan\theta=5$ より

$$45^\circ<\theta<90^\circ$$

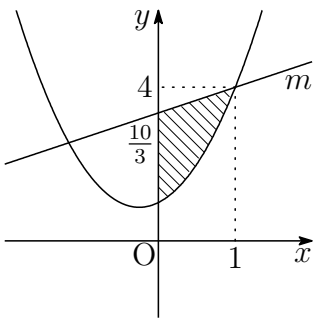
したがって，ℓ とのなす角 45° で傾き正である直線 m の傾きは

$$\tan(\theta-45^\circ)=\frac{\tan\theta-\tan 45^\circ}{1+\tan\theta\tan 45^\circ}=\frac{5-1}{1+5\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

m は点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き $\dfrac{2}{3}$ の直線であるから

$$y-4=\frac{2}{3}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}}$$

(3) 求める面積は，右の図の斜線部分で，その面積を S とすると



$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\left\{\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}-(2x^2+x+1)\right\}dx\\&=\int_0^1\left(-2x^2-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}\right)dx\\&=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{3}x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$