令和３年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択 (数 II・B)，及び他教科との選択
- 国際総合・障害科学類は，数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択，数 III 選択の場合は $\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択，及び他教科との選択
- 教育・心理学類・生物資源・生物・地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類・知識情報・図書館学類・社会工学類・医学・医療学類は $\boxed{1}$ ～ $\boxed{3}$ から 2 題選択，$\boxed{4}$ ～ $\boxed{6}$ から 2 題選択

1 xy 平面において 2 つの円

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0,$$
$$C_2 : x^2 - 8x + y^2 - 4y + k = 0$$

が外接するとし，その接点を P とする．以下の問いに答えよ．

(1) k の値を求めよ．

(2) P の座標を求めよ．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち点 P を通らないものは 2 本ある．これら 2 直線の交点 Q の座標を求めよ．

2 $t = \sin\theta + \cos\theta$ とし，θ は $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする．

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ と $\cos 4\theta$ を，それぞれ t を用いて表せ．

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$ であるとき，t の値をすべて求めよ．

3 O を原点とする座標空間において，3 点 A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ を通る平面を α とする．2 点 P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$ をとる．点 P を通り $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に平行な直線を ℓ とする．直線 ℓ 上の点 R から平面 α に下ろした垂線と α の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし k は実数) とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1) k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ を成分で表せ．

(2) 点 S が △ABC の内部または周上にあるような k の値の範囲を求めよ．

4 p，q を定数とし，$0 < p < 1$ とする．

曲線 $C_1 : y = px^{\frac{1}{p}}$ $(x > 0)$ と，

曲線 $C_2 : y = \log x + q$ $(x > 0)$

が，ある 1 点 $(a,\ b)$ において同じ直線に接するとする．曲線 C_1，直線 $x = a$，直線 $x = e^{-q}$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする．また，曲線 C_2，直線 $x = a$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする．

(1) q を p を用いて表せ．

(2) S_1，S_2 を p を用いて表せ．

(3) $\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$ であることを示せ．ただし，$2.5 < e < 3$ を用いてよい．

5 O を原点とする xy 平面において，点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(2,\ 0)$ をとる．円 $x^2+y^2 = 1$ の，$x \geqq 0$ かつ $y \geqq 0$ を満たす部分を C とし，また点 B を通り y 軸に平行な直線を ℓ とする．2 以上の整数 n に対し，曲線 C 上に点 P，Q を

$$\angle\mathrm{POB} = \frac{\pi}{n}, \quad \angle\mathrm{QOB} = \frac{\pi}{2n}$$

を満たすようにとる．直線 AP と直線 ℓ の交点を V とし，直線 AQ と直線 ℓ の交点を W とする．線分 AP，線分 AQ および曲線 C で囲まれた図形の面積を $S(n)$ とする．また線分 PV，線分 QW，曲線 C および線分 VW で囲まれた図形の面積を $T(n)$ とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\{S(n) + T(n)\}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{S(n)}$ を求めよ．

6 i は虚数単位とする．複素数平面において，複素数 z の表す点 P を $\mathrm{P}(z)$ または点 z と書く．$\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおき，3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\omega)$，$\mathrm{C}(\omega^2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ を考える．

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形であることを示せ．

(2) 点 z が辺 AC 上を動くとき，点 $-z$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(3) 点 z が辺 AB 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_1 とする．また，点 z が辺 AC 上を動くとき，点 z^2 が描く図形を E_2 とする．E_1 と E_2 の共有点をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) C_1，C_2 はそれぞれ

$$C_1 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16,$$
$$C_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 20 - k$$

C_1，C_2 の中心をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{A}(1, -2),\ \mathrm{B}(4,\ 2) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = 5$$

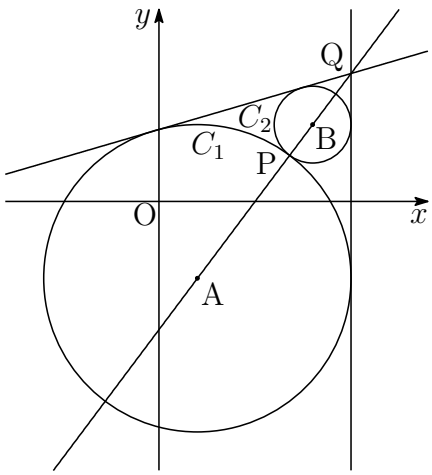
C_1，C_2 の半径はそれぞれ $4,\ \sqrt{20-k}$ であるから，C_1 と C_2 が外接するとき

$$4 + \sqrt{20-k} = 5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = 19}$$

(2) (1) の結果から，P は線分 AB を $4:1$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{1\cdot 1 + 4\cdot 4}{4+1},\ \frac{1\cdot(-2) + 4\cdot 2}{4+1}\right)$$

よって　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\frac{17}{5},\ \frac{6}{5}}\right)$



(3) (1) の結果から，Q は線分 AB を $4:1$ に外分する点であるから

$$\left(\frac{-1\cdot 1 + 4\cdot 4}{4-1},\ \frac{-1\cdot(-2) + 4\cdot 2}{4-1}\right) \quad \text{よって} \quad \mathbf{Q}\left(\mathbf{5},\ \boldsymbol{\frac{10}{3}}\right)$$

補足 C_1, C_2 の半径および A，B の x 座標から，直線 $x = 5$ は C_1, C_2 の共通接線である．直線 AB の偏角を θ とすると，直線 AB の傾きから

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

もう 1 本の共通接線の偏角を φ とすると

$$\varphi + \frac{\pi}{2} = 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = 2\theta - \frac{\pi}{2}$$

よって　$$\tan\varphi = -\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{7}{24}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $(*)$ $t = \sin\theta + \cos\theta$ より $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

よって　　$\boldsymbol{-1 < t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $(*)$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{t^2-1}{2} \qquad (**)$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= t\left(1 - \frac{t^2-1}{2}\right) = \boldsymbol{-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t}\end{aligned}$$

また，$(**)$ の第 1 式から，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$ であるから

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= 1 - 2\sin^2 2\theta = 1 - 2(t^2-1)^2\\ &= \boldsymbol{-2t^4 + 4t^2 - 1}\end{aligned}$$

(3) (2) の結果を $\sin^3\theta + \cos^3\theta = \cos 4\theta$ に代入すると

$$-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t = -2t^4 + 4t^2 - 1$$

整理すると　　$4t^4 - t^3 - 8t^2 + 3t + 2 = 0$

ゆえに　　$(t-1)^2(4t^2 + 7t + 2) = 0$

(1) の結果に注意して解くと　$\boldsymbol{t = 1,\ \dfrac{-7+\sqrt{17}}{8}}$

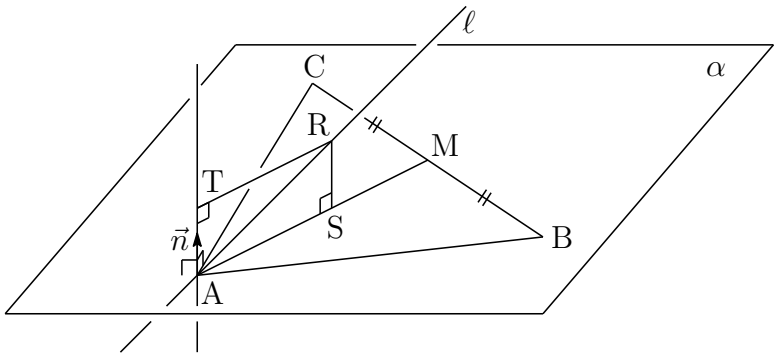
3 (1) A$(-2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 1,\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 0,\ 1)\qquad\cdots(*)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と垂直なベクトルの 1 つを $\vec{n}=(-1,\ 2,\ 2)$ とする．A を通り $\vec{n}$ と平行な直線上に点 R から垂線 RT を引くと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}+\overrightarrow{\mathrm{AT}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AT}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

したがって　$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\qquad\cdots(**)$$



A$(-2,\ 0,\ 0)$，P$(0,\ 5,\ 5)$，Q$(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=(2,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1),\\\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\vec{n}&=18+3k\end{aligned}$$

$|\vec{n}|^2=(-1)^2+2^2+2^2=9$ であるから，上式および $(**)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AS}}&=(2,\ 5,\ 5)+k(1,\ 1,\ 1)-\frac{18+3k}{9}(-1,\ 2,\ 2)\\&=\boldsymbol{\left(1+\frac{k}{3}\right)(4,\ 1,\ 1)}\end{aligned}$$

(2) 2 点 B，C の中点を M とすると，$(*)$ より　$2\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(4,\ 1,\ 1)$

上式および (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=2\left(1+\dfrac{k}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

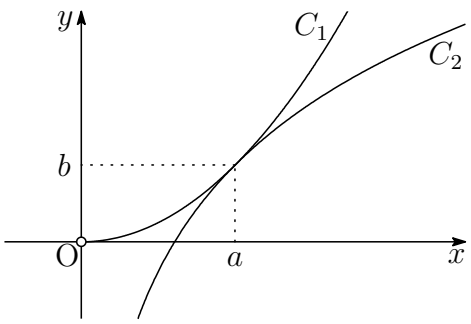
条件を満たすとき　$0\leqq 2\left(1+\dfrac{k}{3}\right)\leqq 1$　よって　$\boldsymbol{-3\leqq k\leqq -\dfrac{3}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=px^{\frac{1}{p}}$，$g(x)=\log x+q$ とおくと

$$f'(x)=x^{\frac{1}{p}-1},\quad g'(x)=\frac{1}{x}$$

$C_1 : y=f(x)$ と $C_2 : y=g(x)$ が点 $(a,\ b)$ で接するから

$$b=f(a)=g(a),\quad f'(a)=g'(a)$$



したがって　$b=pa^{\frac{1}{p}}=\log a+q,\quad a^{\frac{1}{p}-1}=a^{-1}$　$(*)$

$(*)$ の第 2 式において，$\dfrac{1}{p}-1\neq -1$ であるから　$a=1$

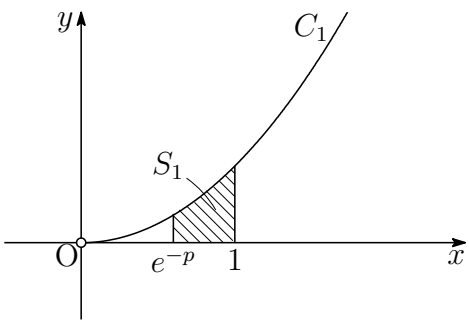
これを $(*)$ の第 1 式に代入すると　$b=p=q$　よって　$\boldsymbol{q=p}$

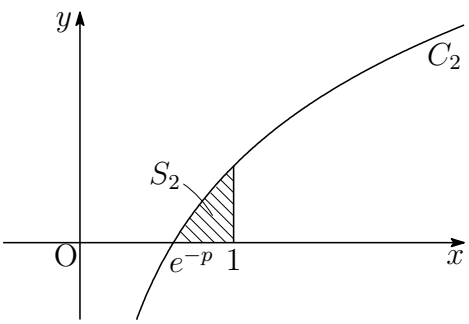
(2) (1) の結果より，S_1 は曲線 $y=px^{\frac{1}{p}}$，直線 $x=1$，直線 $x=x^{-p}$ および x 軸で囲まれた図形の面積であるから (左下図)

$$S_1=\int_{e^{-p}}^{1}px^{\frac{1}{p}}=\frac{p^2}{p+1}\Big[\,x^{1+\frac{1}{p}}\,\Big]_{e^{-p}}^{1}=\boldsymbol{\frac{p^2}{p+1}(1-e^{-p-1})}$$

また，S_2 は曲線 $C_2 : y=\log x+p$，直線 $x=1$，x 軸で囲まれた図形の面積であるから (右下図)

$$S_2=\int_{e^{-p}}^{1}(\log x+p)\,dx=\Big[\,x(\log x-1)+px\,\Big]_{e^{-p}}^{1}$$
$$=\boldsymbol{p-1+e^{-p}}$$





(3) (2) の結果から，$3 > e$ に注意して，$0 \leqq p < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
4S_2 - 3S_1 &= 4(p - 1 + e^{-p}) - \frac{3p^2}{p+1}(1 - e^{-p-1}) \\
&= \frac{p^2 - 4}{p+1} + \left\{4 + \frac{3p^2}{(p+1)e}\right\} e^{-p} \\
&> \frac{p^2 - 4}{p+1} + \left\{4 + \frac{p^2}{p+1}\right\} e^{-p} \\
&= \frac{p+2}{p+1}\{p - 2 + (p+2)e^{-p}\}
\end{aligned}$$

ここで，$h(p) = p - 2 + (p+2)e^{-p}$ とおくと　$h(0) = 0$　$\cdots$①

$$h'(p) = 1 - (p+1)e^{-p}, \quad h''(p) = pe^{-p}$$

$h'(0) = 0$ および $p > 0$ において $h''(p) > 0$ であるから

$0 < p < 1$ において　$h'(p) > 0$　$\cdots$②

①，② より，$0 < p < 1$ において　　$h(p) > 0$

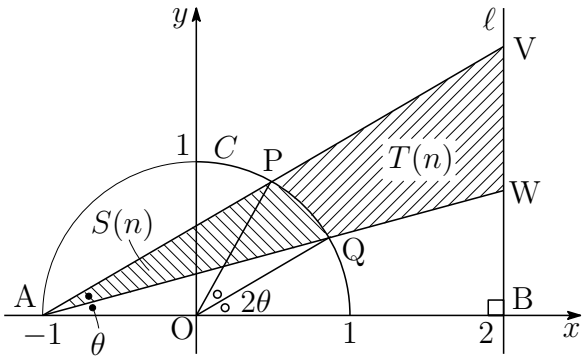
したがって　$4S_2 - 3S_1 > \dfrac{p+2}{p+1}h(p) > 0$　よって　$\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $2\theta = \angle\mathrm{QOB} = \dfrac{\pi}{2n}$ とおくと　$n = \dfrac{\pi}{4\theta}$

$$\begin{aligned} S(n)+T(n) &= \triangle\mathrm{ABV} - \triangle\mathrm{ABW} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 3^2\tan 2\theta - \frac{1}{2}\cdot 3^2\tan\theta \\ &= \frac{9}{2}(\tan 2\theta - \tan\theta) \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき，$\theta \to 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\{S(n)+T(n)\} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{4\theta}\cdot\frac{9}{2}(\tan 2\theta - \tan\theta) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{9\pi}{8}\left(2\cdot\frac{\tan 2\theta}{2\theta} - \frac{\tan\theta}{\theta}\right) \\ &= \frac{9\pi}{8}(2\cdot 1 - 1) = \boldsymbol{\frac{9\pi}{8}} \end{aligned}$$



(2) $S(n) =$ 扇形 OPQ $+ \triangle\mathrm{OPA} - \triangle\mathrm{OQA}$ より

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta + \frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi - 4\theta) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\sin(\pi - 2\theta) \\ &= \theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

(1) と同様にして

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nS(n) &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{4\theta}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 4\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 4\theta}{4\theta} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{T(n)}{S(n)} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{S(n)+T(n)}{S(n)} - 1\right\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\{S(n)+T(n)\}}{nS(n)} - 1\right) = \frac{\frac{9\pi}{8}}{\frac{\pi}{2}} - 1 = \boldsymbol{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

6 (1) $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ より，$|\omega| = 1$，$\omega^3 = 1$ であるから，
A(1)，B(ω)，C(ω^2) について

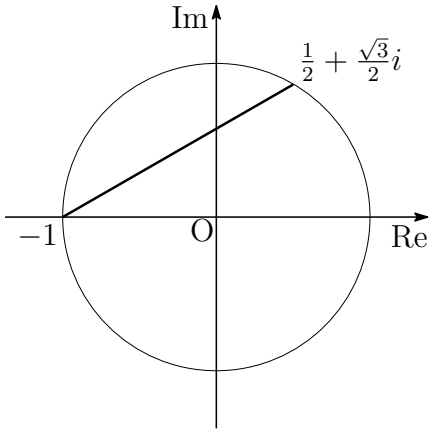
$$\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= |\omega - 1|,\\
\mathrm{BC} &= |\omega^2 - \omega| = |\omega||\omega - 1| = |\omega - 1|,\\
\mathrm{CA} &= |1 - \omega^2| = |\omega^3 - \omega^2| = |\omega|^2|\omega - 1| = |\omega - 1|
\end{aligned}$$

AB = BC = CA より，△ABC は正三角形である．

(2) 辺 AC 上の点 z を $z = (1-t)1 + t\omega^2$ とおくと $(0 \leqq t \leqq 1)$

$$-z = (1-t)(-1) + t(-\omega^2) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

したがって，点 $-z$ は 2 点 -1，$-\omega^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ の両端を含む線分を描く．



(3) ${z_1}^2 = {z_2}^2$ より　$z_1 = z_2$　または　$z_1 = -z_2$

$z_1 = z_2$ のとき，線分 AB と線分 AC の共有点は　1

$z_1 = -z_2$ のとき，$-z_2$ は (2) の線分上の点で，この線分と線分 AB の共有点は $\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ より

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}i = -z_2$$

よって，E_1 と E_2 の共有点は　$\mathbf{1, -\dfrac{1}{3}}$