令和３年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　令和 3 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+2-3a=0$ が 2 つの整数の解をもつような定数 a の値を求めよ．

(2) t が 1 より大きい実数の範囲を動くとき

$$(\log_2 t+\log_t 2)(\log_2 t+\log_t 4)$$

の最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x^6=1$ の解を 1 つ選び，1 個のさいころを投げる．選んだ解を z，さいころの出た目を a とするとき $z^a=1$ となる確率を求めよ．

2 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす四面体 OABC について，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値を求めよ．

(2) 点 B から 3 点 O，A，C を通る平面 α に下ろした垂線と α の交点を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3) BH の長さを求めよ．

(4) 2 点 O，H を通る直線と直線 AC の交点を I とおく．四面体 HABI の体積を求めよ．

3 a, b を実数とし，k を正の実数とする．3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ は虚数解 α をもち，α は $|\alpha|=k$，$\alpha^2+k\overline{\alpha}=0$ を満たしている．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．次の問いに答えよ．

(1) $\overline{\alpha}$ が $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の解であることを示せ．

(2) a, b を k を用いて表せ．

(3) $k=2$ のとき 3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の虚数解で虚部が負であるものを β とおく．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\beta-\gamma)$，$\mathrm{B}(\beta+\gamma)$ を頂点とする三角形が O を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるような複素数 γ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1) M の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と y 軸および直線 $y = M$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) a を実数とするとき，$\displaystyle\int_0^{\pi} \{f(x) - a\}^2\, dx$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答例

1 (1) 2 次方程式

$$x^2 + ax + 2 - 3a = 0 \qquad (*)$$

の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = 2 - 3a \qquad (**)$$

上の 2 式から a を消去すると

$$\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha - 3)(\beta - 3) = 11$$

$\alpha - 3$，$\beta - 3$ は整数であるから，上の第 2 式より

$$(\alpha - 3) + (\beta - 3) = \pm(1 + 11) \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 6 \pm 12$$

$(**)$ の第 1 式から　$a = -18,\ 6$　これらを $(*)$ に代入すると

$a = -18$ のとき　$x^2 - 18x + 56 = 0$　ゆえに　$(x - 4)(x - 14) = 0$
$a = 6$ のとき　$x^2 + 6x - 16 = 0$　ゆえに　$(x - 2)(x + 8) = 0$

このとき，$(*)$ は整数解をもつ．よって　$\boldsymbol{a = -18,\ 6}$

(2)
$$\begin{aligned}(\log_2 t + \log_t 2)(\log_2 t + \log_t 4) &= \left(\log_2 t + \frac{1}{\log_2 t}\right)\left(\log_2 t + \frac{2}{\log_2 t}\right)\\ &= (\log_2 t)^2 + \frac{2}{(\log_2 t)^2} + 3\\ &\geqq 2\sqrt{(\log_2 t)^2 \cdot \frac{2}{(\log_2 t)^2}} + 3 = 2\sqrt{2} + 3\end{aligned}$$

$(\log_2 t)^2 = \dfrac{2}{(\log_2 t)^2}$　すなわち　$t = 2^{2^{\frac{1}{4}}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2} + 3}$

(3) $w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$x^6 = 1$ の解は

$$1,\ w,\ w^2,\ w^3,\ w^4,\ w^5$$

さいころの出た目 a により，$z^a = 1$ となるは

15 通り

よって　$\dfrac{15}{6^2} = \boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

z \ a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{w}$						1
$\boldsymbol{w^2}$			1			1
$\boldsymbol{w^3}$		1		1		1
$\boldsymbol{w^4}$			1			1
$\boldsymbol{w^5}$						1

疑問 福岡教育大学の解答では，それぞれの $z=w^k(k=0,1,2,3,4,5)$ に対する確率を求めている．

$$1,\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{6}$$

拙者以外にも「選ぶ」確率と考えた受験生も多かったのではないだろうか．誤解がないように「それぞれの z に対する $z^a=1$ となる確率」とすべきであったと思う．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{2}\\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{8}\\
\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\frac{\pi}{2}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

(3) (1)，(2) の結果から

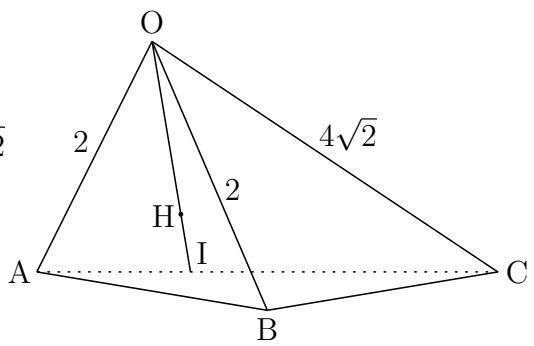
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{1}{4}\cdot2^2+\frac{1}{16}(4\sqrt{2})^2=3,\\
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{4}\cdot8=3,\\
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|&=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
&=3-2\cdot3+2^2=1
\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{BH=1}$

(4) $\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$

四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{2}\cdot1=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$



(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

I は AC を 1 : 2 に内分し，H は OI を 3 : 1 に内分するから，求める四面体 HABI の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{9}}$$

補足 $a=\mathrm{OA},\ b=\mathrm{OB},\ c=\mathrm{OC}$，$\alpha=\angle\mathrm{BOC}$，$\beta=\angle\mathrm{COA}$，$\gamma=\angle\mathrm{AOB}$ とすると，四面体 OABC の体積 V は[1]

$$V=\frac{1}{6}abc\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) α は 3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の解であるから

$$3\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha-2k^3=0$$

$a,\ b,\ k$ が実数であることに注意して，両辺の共役複素数をとると

$$3\overline{\alpha^3}+a\overline{\alpha^2}+b\overline{\alpha}-2k^3=0$$

$\overline{\alpha^3}=\overline{\alpha}^3,\ \overline{\alpha^2}=\overline{\alpha}^2$ であるから

$$3\overline{\alpha}^3+a\overline{\alpha}^2+b\overline{\alpha}-2k^3=0$$

よって，$\overline{\alpha}$ は方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の解である．

(2) $\alpha^2+k\overline{\alpha}=0$ より　$\overline{\alpha}^2+\alpha=0$　ゆえに　$(\alpha^2-\overline{\alpha}^2)=k(\alpha-\overline{\alpha})$
α は虚数であるから，$\alpha-\overline{\alpha}\neq 0$ より

$$\alpha+\overline{\alpha}=k\quad\cdots①$$

3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の解を $\alpha,\ \overline{\alpha},\ c$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\overline{\alpha}+c=-\frac{a}{3},\quad \alpha\overline{\alpha}+c(\alpha+\overline{\alpha})=\frac{b}{3},\quad \alpha\overline{\alpha}c=\frac{2k^3}{3}$$

① および $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=k^2\cdots②$ を代入すると

$$k+c=-\frac{a}{3},\quad k^2+ck=\frac{b}{3},\quad k^2c=\frac{2k^3}{3}$$

第 3 式より $(k>0)$，$c=\dfrac{2}{3}k$．これを第 1 式，第 2 式に代入すると

$$k+\frac{2}{3}k=-\frac{a}{3},\quad k^2+\frac{2}{3}k^2=\frac{b}{3}$$

よって　$\boldsymbol{a=-5k,\ b=5k^2}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.11)

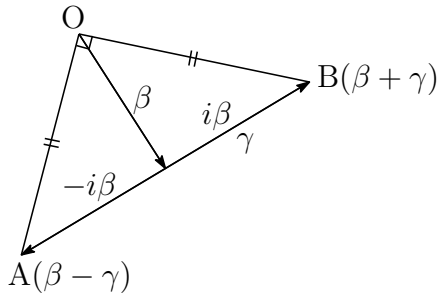
(3) $k=2$ のとき，①，② より，α, $\overline{\alpha}$ は 2 次方程式

$$x^2-2x+4=0$$

の解である．これを解いて　$x=1\pm\sqrt{3}i$　したがって　$\beta=1-\sqrt{3}i$

条件から

$$\begin{aligned}\gamma&=\pm i\beta=\pm i(1-\sqrt{3}i)\\&=\boldsymbol{\pm(\sqrt{3}+i)}\end{aligned}$$

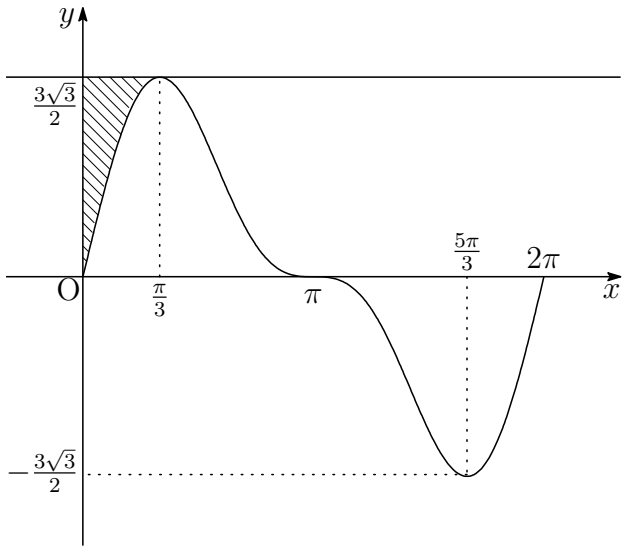


$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\sin 2x+2\sin x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos 2x+2\cos x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

よって　　$M=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$



(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \frac{\pi}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + 2\sin x)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

(3) まず

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi} (\sin 2x + 2\sin x)\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos 2x\right]_0^{\pi} = 4, \\
\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx &= \int_0^{\pi} (\sin 2x + 2\sin x)^2\,dx \\
&= \int_0^{\pi} (\sin^2 2x + 4\sin 2x \sin x + 4\sin^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - 2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x\right) dx \\
&= \left[\frac{5}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{2}{3}\sin 3x - \sin 2x + 2\sin x\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{5}{2}\pi
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \{f(x) - a\}^2\,dx &= \int_0^{\pi} f(x)^2\,dx - 2a\int_0^{\pi} f(x)\,dx + a^2\int_0^{\pi} dx \\
&= \frac{5\pi}{2} - 8a + \pi a^2 \\
&= \pi\left(a - \frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{5\pi}{2} - \frac{16}{\pi}
\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a = \frac{4}{\pi}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\frac{5\pi}{2} - \frac{16}{\pi}}$