令和３年度　大阪大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部　数 I・II・III・A・B

1 $a,\ b$ を $ab < 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から，曲線 $y = \dfrac{1}{x}\ (x > 0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s < t$ とする．

(1) s および t を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0,\ y > 0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ．

2 空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある．$s,\ t$ を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2$，$\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{COA} = 60^\circ$，$\angle\mathrm{POQ} = 90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

3 n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 $p,\ q$ の値を求めよ．

4 整数 $a,\ b,\ c$ に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots (*)$$

(1) 整数 $a,\ b,\ c$ が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $c = 3600$ のとき，$(*)$ および $a < b$ をみたす整数の組 $(a,\ b)$ の個数を求めよ．

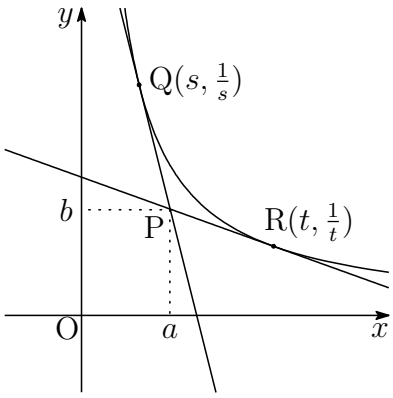
5 次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ のいずれかと等しいことであることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $y=\dfrac{1}{x}$ より　$y'=-\dfrac{1}{x^2}$



曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$ における接線は

$$y-\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}(x-s)$$

これが点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$b-\frac{1}{s}=-\frac{1}{s^2}(a-s)$$

s について整理すると　$bs^2-2s+a=0$　$\cdots$①

同様に，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{R}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ についても次式を得る．

$$bt^2-2t+a=0 \quad \cdots ②$$

①，② から，$s,\ t\ (s<t)$ は 2 次方程式 $bu^2-2u+a=0$ の解である．
このとき，$b>0,\ D/4=1-ab>0$ に注意して

$$\boldsymbol{s=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b},\quad t=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}}$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{t}{s}=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{1-\sqrt{1-ab}}=\frac{2}{1-\sqrt{1-ab}}-1$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ は曲線 $y=\dfrac{9}{4}-3x^2\ (x>0,\ y>0)$ の点であるから

$$a>0,\quad (*)\ b=\frac{9}{4}-3a^2>0\quad \text{すなわち}\quad 0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$ab=a\left(\dfrac{9}{4}-3a^2\right)=\dfrac{9}{4}a-3a^3$ より

$$f(a)=\frac{9}{4}a-3a^3\quad\left(0<a<\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

とおくと　$f'(a)=\dfrac{9}{4}-9a^2=-9\left(a+\dfrac{1}{2}\right)\left(a-\dfrac{1}{2}\right)$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$(\frac{\sqrt{3}}{2})$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	(0)

ab が最大のとき，$\dfrac{t}{s}$ は最小となり，最小値は

$$\frac{2}{1-\sqrt{1-\frac{3}{4}}}-1=\mathbf{3}$$

このとき，$(*)$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{3}{2}}$

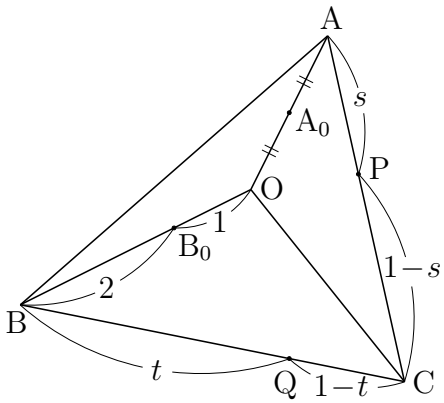
2 (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より $(0<s<1)$

$$\vec{p}-\vec{a}=s(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\vec{a})$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(1-\dfrac{1}{s}\right)\vec{a}+\dfrac{1}{s}\vec{p}$

点 Q は線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-t)\vec{b}+t\left\{\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+\frac{1}{s}\vec{p}\right\}\\&=t\left(1-\frac{1}{s}\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\frac{t}{s}\vec{p}\end{aligned}$$

$\vec{a}=2\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}$，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2t\left(1-\frac{1}{s}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+3(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB_0}}+\frac{t}{s}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

点 Q は平面 $\mathrm{A_0B_0P}$ 上の点であるから

$$2t\left(1-\frac{1}{s}\right)+3(1-t)+\frac{t}{s}=1\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{t=\frac{2s}{s+1}}$$

(2) 条件から　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=1\cdot 2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 90^\circ=0,\quad \vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$$

$\vec{p}=s\vec{c}+(1-s)\vec{a}$，$\vec{q}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$ について

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\vec{q}&=\{s\vec{c}+(1-s)\vec{a}\}\cdot\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\\&=s(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+st|\vec{c}|^2+(1-s)(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+(1-s)t\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=4st-(1-s)(1-t)+(1-s)t\\&=2t(s+1)+s-1\end{aligned}$$

(1) の結果および，$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ より $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$ であるから

$$2\cdot\frac{2s}{s+1}(s+1)+s-1=0\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{s=\frac{1}{5}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)$，$g(x)=f(x)+\dfrac{(x-t)^2}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{x}-\frac{1}{t}=-\frac{1}{xt}(x-t)\\ g'(x)&=f'(x)+x-t=-\frac{1}{xt}(x-t)+x-t\\ &=\frac{(xt-1)(x-t)}{xt}\end{aligned}$$

$x\geqq t$ において $(t\geqq 1)$，$f(x)$ は単調減少，$g(x)$ は単調増加である．
$f(t)=0$，$g(t)=0$ であるから，$x\geqq t$ において

$$f(x)\leqq 0,\quad g(x)=f(x)+\frac{(x-t)^2}{2}\geqq 0$$

したがって　$-\dfrac{(x-t)^2}{2}\leqq f(x)\leqq 0$

よって，$x\geqq t$ のとき $(t\geqq 1)$，次式が成立する．

$$-\frac{(x-t)^2}{2}\leqq \log x-\log t-\frac{1}{t}(x-t)\leqq 0$$

別解 (部分積分法を用いた証明法)

$$\begin{aligned}\log x-\log t&=\int_t^x\frac{1}{u}\,du=\int_t^x(u-x)'\frac{1}{u}\,du\\ &=\left[\,(u-x)\frac{1}{u}\,\right]_t^x-\int_t^x(u-x)\left(-\frac{1}{u^2}\right)du\\ &=\frac{1}{t}(x-t)-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}du\end{aligned}$$

したがって　$\log x-\log t-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du$　(A)

$1\leqq t\leqq x$ であるから　$0\leqq\displaystyle\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq\int_t^x(x-u)\,du$

$$-\frac{(x-t)^2}{2}=\int_t^x(u-x)\,du\leqq-\int_t^x\frac{x-u}{u^2}\,du\leqq 0\qquad\text{(B)}$$

(A)，(B) により，(1) の不等式が導かれる．

(2) (1) で示した不等式により

$$-\int_t^{t+\frac{1}{n}} \frac{(x-t)^2}{2}\,dx \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} (\log x - \log t)\,dx - \frac{1}{t}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (x-t)\,dx \leqq 0$$

$$-\left[\ \frac{(x-t)^3}{6}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{t}\left[\ \frac{(x-t)^2}{2}\ \right]_t^{t+\frac{1}{n}} \leqq 0$$

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

(3) (2) で不等式において，$t = 1 + \dfrac{k}{n}$ とすると

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq 0$$

辺々に $-n$ を掛けると

$$0 \leqq \log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \log x\,dx + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n^2}$$

上式について，$k=0$ から $k=n-1$ までの総和をとると

$$0 \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) - n\int_1^2 \log x\,dx + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$$

$p = \displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$ とおくと

$$p = \int_1^2 \log x\,dx = \left[\ x(\log x - 1)\ \right]_1^2 = 2\log 2 - 1$$

$a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より　$0 \leqq a_n - pn + \dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \leqq \frac{1}{6n}$　$\cdots(*)$

$-q = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ とおくと

$$q = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\ \log(1+x)\ \right]_0^1 = -\frac{\log 2}{2}$$

$(*)$ において，$n \longrightarrow \infty$ とすると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - pn - q) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$$

よって　$\boldsymbol{p = 2\log 2 - 1,\ \ q = -\dfrac{\log 2}{2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\displaystyle\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots(*)$

$(*)$ より $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx + b\int_a^c x\,dx - a\int_b^c x\,dx = 0$

$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{b}{2}(c^2-a^2)-\frac{a}{2}(c^2-b^2)=0$$
$$\frac{1}{3}(b^3-a^3)+\frac{c^2}{2}(b-a)+\frac{ab}{2}(b-a)=0$$

$a \neq b$ であるから　$2(a^2+ab+b^2)+3c^2+3ab=0$

したがって　$(2a+b)(a+2b)=-3c^2 \quad \cdots$①

上式より　$2a+b\equiv 0$　または　$a+2b\equiv 0 \pmod 3$

$(2a+b)+(a+2b)=3(a+b)$ であるから

$$2a+b\equiv 0,\quad a+2b\equiv 0 \pmod 3$$

① より　$\dfrac{2a+b}{3}\cdot\dfrac{a+2b}{3}=-\dfrac{c^2}{3} \quad \cdots$①$'$

①$'$ の左辺は整数より，c^2 は 3 で割り切れるから，c は 3 の倍数である．

(2) $\dfrac{2a+b}{3}=A$，$\dfrac{a+2b}{3}=B$ とおくと (A, B は整数)

$$a=2A-B,\quad b=-A+2B$$

$c=3600$ のとき，①$'$ より　$AB=-2^8\cdot 3^3\cdot 5^4 \quad \cdots(**)$

$b-a=3(B-A)$ であるから，$a<b$ より　$A<0<B$

よって，$(**)$ を満たす組 $(A,\ B)$ の個数は

$$(8+1)(3+1)(4+1)=\mathbf{180}\ \textbf{(個)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $f(x) = x - \tan x$ とおくと　$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x \leqq 0$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ は，区間 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ において単調減少で，$-\infty < f(x) < \infty$ であるから，実数 a に対して

$$f(x) = a \quad \text{すなわち} \quad x - \tan x = a$$

を満たす x $\left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がちょうど 1 個ある．

(2) $C : y = \sin x$ より，$y' = \cos x$ であるから，C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(u,\ \sin u)$ における接線は，それぞれ

$$y = x\cos t - t\cos t + \sin t, \quad y = x\cos u - u\cos u + \sin u$$

これらの 2 直線が一致するとき，$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ を満たす $t,\ u$ が存在する，すなわち

(A) $\cos t = \cos u,\ \ -t\cos t + \sin t = -u\cos u + \sin u,\ \ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \leqq u$ を満たす $t,\ u$ が存在する．

これと次が同値であることを示せばよい．

(B) $f(x) = n\pi$ $\left(|x| < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の解を x_n とすると，t は $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$ のいずれかと等しい．

(A) $\Longrightarrow$ (B) を示す．(A) の第 1 式より

(i) $u = t + 2l\pi$ (l は自然数)　または　(ii) $u = -t + 2m\pi$ (m は自然数)

(i) のとき，$\sin u = \sin t$，$\cos u = \cos t$ を (A) の第 2 式に代入すると

$$-t\cos t + \sin t = -u\cos t + \sin t \quad \text{ゆえに} \quad (u - t)\cos t = 0$$

$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos t \neq 0$ であるから，$u = t$ となり不適．

(ii) のとき，$\sin u = -\sin t$，$\cos u = \cos t$ を (A) の第 2 式に代入すると

$$-t\cos t + \sin t = -u\cos t - \sin t \quad \text{ゆえに} \quad u\cos t = t\cos t - 2\sin t$$

$-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos t \neq 0$ であるから　$u = t - 2\tan t$

$u = -t + 2m\pi$ を代入すると　$-t + 2m\pi = t - 2\tan t$

整理すると　$t - \tan t = m\pi$　すなわち　$f(t) = m\pi$

(B) $\Longrightarrow$ (A) は，(ii) の証明を逆に辿ればよい．(証終)