令和３年度　九州大学２次試験後期日程 (数学問題)120 分
工学部　3 月 12 日　数学 I・II・III・A・B

1 三角形 ABC の辺 AB，BC，AC の長さをそれぞれ 5，7，6 とし，点 P と点 Q はそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす点とする．さらに，点 A から線分 PQ に下ろした垂線と線分 PQ の交点を H，線分 AH と線分 BC の交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1) BR : RC を求めよ．

(2) AR : RH を求めよ．

(3) 三角形 RHC の面積を求めよ．

2 M を 2 以上の自然数，p を実数として，次の条件によって定められる $3M$ 個の項からなる数列 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{3M}$ を考える．

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = \frac{3n+p}{27M^3}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0$$

(1) $b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 3M-1)$ とするとき，数列 $b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_{3M-1}$ の一般項 b_n を求めよ．

(2) 数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{3M}$ の一般項 a_n を求めよ．さらに，$a_{3M} = 0$ を満たす p を p_M とするとき，p_M を M の式で表せ．

(3) (2) で求めた p_M について，$p = p_M$ の場合における数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{3M}$ の中で最小の項を c_M とする．$a_n = c_M$ となるすべての n を M の式で表せ．さらに，$\displaystyle\lim_{M\to\infty} c_M$ を求めよ．

3 実数 a は $a > 1$ とする．曲線 $y = e^x$ と直線 $y = a - 1$，直線 $y = a$ および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに一回転させて得られる立体の体積を $V(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $V(a)$ を求めよ．

(2) $V(a)$ を最小とする a の値を求めよ．

(3) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{a\to\infty}(V(a) - V(a-1))$$

必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ を証明なしに用いてよい．

4 正四面体 ABCD の頂点 A，B，C，D 上の動点 P が，時刻 0 には頂点 B にいるとする．0 以上の整数 n に対して，時刻 $n+1$ の P の位置が，時刻 n の P の位置から以下のルールに従って決まるとする．

- 時刻 n に P が頂点 A にいる場合
  時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{6}$ で頂点 A，B，C，D にいる．
- 時刻 n に P が頂点 B にいる場合
  時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$ で頂点 A，B，C にいる．
- 時刻 n に P が頂点 C にいる場合
  時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$ で頂点 A，C，D にいる．
- 時刻 n に P が頂点 D にいる場合
  時刻 $n+1$ に P はそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$ で頂点 A，B，D にいる．

0 以上の整数 n に対して，時刻 n に P が頂点 A，B，C，D にいる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) n が 3 の倍数のときの $b_n - c_n$ と $c_n - d_n$ を求めよ．

(3) n が 3 の倍数のときの b_n，c_n，d_n を求めよ．

5 $f(x)$ を次の条件を満たす 3 次の多項式とする．

(a) x^3 の係数は 1 である．

(b) $0,\ 1, -1$ ではない複素数 ω が存在して，すべての自然数 n について $f(\omega^n) = 0$ となる．

以下の問いに答えよ．

(1) $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ または $\omega = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であることを示せ．ただし，i は虚数単位とする．

(2) $f(x)$ を求めよ．

(3) $g(x)$ を次の多項式とする．

$$g(x) = \sum_{n=0}^{2021} x^n = x^{2021} + x^{2020} + \cdots + 1$$

$g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの余りを求めよ．

解答例

1 (1) △ABC について，$a=7,\ b=6,\ c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{1}{5}$$

$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \ \vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \ \vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とおくと

$$\vec{p}=2\vec{b},\quad \vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+2(\vec{c}-\vec{b})=-\vec{b}+2\vec{c},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{q}-\vec{p}=(-\vec{b}+2\vec{c})-2\vec{b}=-3\vec{b}+2\vec{c}$$

$|\vec{b}|^2=5^2=25$，$|\vec{c}|^2=6^2=36$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos A=5\cdot6\cdot\dfrac{1}{5}=6$ であるから

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{b}\cdot(-3\vec{b}+2\vec{c})=-3|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}=-3\cdot5^2+2\cdot6=-63=-7\cdot9$$
$$\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{c}\cdot(-3\vec{b}+2\vec{c})=-3\vec{b}\cdot\vec{c}+2|\vec{c}|^2=-3\cdot6+2\cdot6^2=54=6\cdot9$$

上の 2 式から　$6\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+7\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$　ゆえに　$(6\vec{b}+7\vec{c})\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

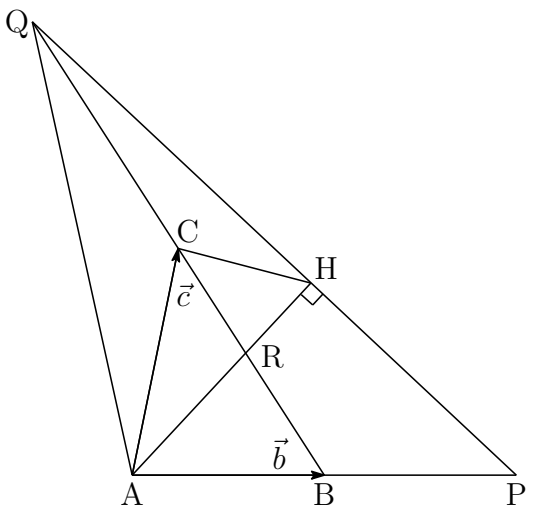
したがって　$(*)\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{6\vec{b}+7\vec{c}}{13}$　よって　**BR : RC = 7 : 6**

(2) $\vec{p}=2\vec{b},\ \ \vec{q}=-\vec{b}+2\vec{c}$ より

$$\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{p},\quad \vec{c}=\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=\frac{1}{13}\left\{6\cdot\frac{1}{2}\vec{p}+7\left(\frac{1}{4}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}\right)\right\}\\&=\frac{1}{52}(19\vec{p}+14\vec{q})\\&=\frac{33}{52}\cdot\frac{19\vec{p}+14\vec{q}}{33}=\frac{33}{52}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\end{aligned}$$



よって　　AR : RH = **33 : 19**

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5^2\cdot6^2-6^2}=6\sqrt{6}$

(1)，(2) の結果から　$\triangle\mathrm{RHC}=\dfrac{19}{33}\triangle\mathrm{ARC}$，$\triangle\mathrm{ARC}=\dfrac{6}{13}\triangle\mathrm{ABC}$

よって　　$\triangle\mathrm{RHC}=\dfrac{19}{33}\cdot\dfrac{6}{13}\cdot6\sqrt{6}=\boldsymbol{\dfrac{228}{143}\sqrt{6}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\dfrac{3n+p}{27M^3}$, $\quad a_1=0, \quad a_2=0$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より $\quad b_{n+1}-b_n=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$

$$b_1=a_2-a_1=0-0=0, \quad b_{n+1}-b_n=\frac{3n+p}{27M^3}$$

$n>1$ のとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{1}{27M^3}\sum_{k=1}^{n-1}(3k+p)$

$$b_n-b_1=\frac{1}{27M^3}\left\{\frac{3}{2}n(n-1)+p(n-1)\right\}$$

上式は，$n=1$ のときも成立する．$b_1=0$ より

$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{54M^3}(n-1)(3n+2p)}$$

(2) (1) の結果から，$n>1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\frac{1}{54M^3}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)(3k+2p)$$

$$\begin{aligned}a_n-a_1&=\frac{1}{54M^3}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}\\&\qquad+\frac{p}{54M^3}\sum_{k=1}^{n-1}\{(k-1)k-(k-2)(k-1)\}\\&=\frac{1}{54M^3}(n-2)(n-1)n+\frac{p}{54M^3}(n-2)(n-1)\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立する．$a_1=0$ より

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{54M^3}(n-2)(n-1)(n+p)}$$

$a_{3M}=0$ であるから $(M\geqq 2)$

$$a_{3M}=\frac{1}{54M^3}(3M-2)(3M-1)(3M+p)=0$$

$3M-2\neq 0$，$3M-1\neq 0$ であるから $\quad \boldsymbol{p_M=-3M}$

(3) (2) の結果から，$p=-3M$ を (1) の結果に代入すると

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{54M^3}(n-1)\{3n+2(-3M)\}=\frac{1}{18M^3}(n-1)(n-2M)$$

したがって　$a_1=a_2>\cdots>a_{2M-1}>a_{2M}=a_{2M+1}<a_{2M+2}<\cdots<a_{3M}$

最小の項 c_M は　　a_{2M} と a_{2M+1}

よって，$a_n=c_M$ となる n は　　$\boldsymbol{n=2M,\ 2M+1}$

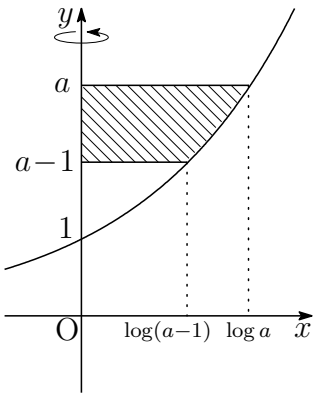
(2) の結果から　$a_n=\dfrac{1}{54M^3}(n-2)(n-1)(n-3M)$

$$\begin{aligned}c_M&=\frac{1}{54M^3}(2M-2)(2M-1)(2M-3M)\\&=-\frac{1}{27M^2}(M-1)(2M-1)\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{M\to\infty}c_M=\lim_{M\to\infty}\left\{-\frac{1}{27}\left(1-\frac{1}{M}\right)\left(2-\frac{1}{M}\right)\right\}=\boldsymbol{-\frac{2}{27}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=e^x$ より $\dfrac{dy}{dx}=e^x$

x	$\log(a-1)\longrightarrow\log a$
y	$a-1\longrightarrow a$



$$\begin{aligned}\frac{V(a)}{\pi}&=\int_{a-1}^{a}x^2\,dy=\int_{\log(a-1)}^{\log a}x^2e^x\,dx\\&=\Big[\,e^x(x^2-2x+2)\,\Big]_{\log(a-1)}^{\log a}\\&=a\{(\log a-1)^2+1\}\\&\qquad-(a-1)\{(\log(a-1)-1)^2+1\}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{V(a)=\pi\big[\,a(\log a-1)^2-(a-1)\{(\log(a-1)-1)^2\}+1\,\big]}$

補足 次の積分公式を利用している [1].

$$\int e^{px+q}f(x)\,dx=\frac{e^{px+q}}{p}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{p}+\frac{f''(x)}{p^2}-\frac{f'''(x)}{p^3}+\cdots\right\}+C$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7)

(2) $\dfrac{V(a)}{\pi} = \displaystyle\int_{a-1}^{a} x^2\,dy = \int_{a-1}^{a} (\log y)^2\,dy$ であるから $(a>1)$

$$\begin{aligned}\frac{V'(a)}{\pi} &= (\log a)^2 - \{\log(a-1)\}^2 \\ &= \{\log a + \log(a-1)\}\{\log a - \log(a-1)\} \\ &= \log a(a-1)\log\frac{a}{a-1} \qquad (*)\end{aligned}$$

$V'(a)=0$ とすると，$\dfrac{a}{a-1}>1$ であるから　$a(a-1)=1$

$$a^2-a-1=0 \quad \text{このとき}, a>1 \text{ に注意して} \quad a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a	(1)	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$V'(a)$		$-$	0	$+$
$V(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって，$V(a)$ を最小にする a の値は　$\boldsymbol{a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $a>1$ において，$V(a)$ は微分可能であるから，平均値の定理により

$$V(a)-V(a-1)=\frac{V(a)-V(a-1)}{a-(a-1)}=V'(c), \quad a-1<c<a$$

を満たす c が存在する．$a\longrightarrow\infty$ のとき，$c\longrightarrow\infty$ であるから，$(*)$ より

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty}\frac{V'(c)}{\pi} &= \lim_{c\to\infty}\log c(c-1)\log\frac{c}{c-1} \\ &= \lim_{c\to\infty}\frac{\log c(c-1)}{c-1}\log\left(1+\frac{1}{c-1}\right)^{c-1} \\ &= \lim_{c\to\infty}\left\{\frac{c}{c-1}\cdot\frac{\log c}{c}+\frac{\log(c-1)}{c-1}\right\}\log\left(1+\frac{1}{c-1}\right)^{c-1} \\ &= (1\cdot 0+0)\log e = 0\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\{V(a)-V(a-1)\}=\lim_{c\to\infty}V'(c)=\mathbf{0}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 定められたルールにより，次の確率漸化式が成立する．

$$a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ c_0 = 0,\ d_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n,\\
b_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n \qquad\quad + \frac{1}{3}d_n,\\
c_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n\\
d_{n+1} &= \frac{1}{6}a_n \qquad\quad + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{3}d_n
\end{aligned}$$

$a_0 = 0,\ a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ および上の第 1 式から

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(b_n + c_n + d_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3}(1 - a_n)$$

整理すると　$a_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{3}$　ゆえに　$a_{n+1} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{6}\left(a_n - \dfrac{2}{5}\right)$

$$a_n - \frac{2}{5} = \left(a_0 - \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = \frac{2}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}}$$

(2) 確率漸化式より

$$b_{n+3} - c_{n+3} = \frac{1}{3}(d_{n+2} - c_{n+2}) = \frac{1}{9}(d_{n+1} - b_{n+1}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3(b_n - c_n),$$

$$c_{n+3} - d_{n+3} = \frac{1}{3}(b_{n+2} - d_{n+2}) = \frac{1}{9}(b_{n+1} - c_{n+1}) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3(c_n - d_n)$$

よって，n が 3 の倍数のとき

$$b_n - c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n(b_0 - c_0) = \boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$c_n - d_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n(c_0 - d_0) = \mathbf{0}$$

(3) n が 3 の倍数のとき，(1) の結果から　$b_n + c_n + d_n = 1 - a_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

これに $d_n = c_n$ を代入すると　$b_n + 2c_n = \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

(2) の結果の第 1 式と上式から

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$\boldsymbol{c_n = d_n = \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

補足 一般の b_n，c_n，d_n については，次のようになる [2].

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$ とおくと，与えられた確率漸化式より

$$b_{n+1} + \omega c_{n+1} + \omega^2 d_{n+1} = -\frac{1}{3}\omega^2(b_n + \omega c_n + \omega^2 d_n)$$
$$b_{n+1} + \omega^2 c_{n+1} + \omega d_{n+1} = -\frac{1}{3}\omega(b_n + \omega^2 c_n + \omega d_n)$$

上の 2 式および (3) の結果から

$$b_n + \omega c_n + \omega^2 d_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n w^{2n} \quad \cdots ①$$
$$b_n + \omega^2 c_n + \omega d_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n w^n \quad \cdots ②$$
$$b_n + c_n + d_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \cdots ③$$

$\dfrac{1}{3}(① + ② + ③)$ より，$\omega^{2n} = \overline{\omega^n}$ に注意して

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(\omega^{2n} + \omega^n) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cos\frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{3}(① \times \omega^2 + ② \times \omega + ③)$ より，$\omega^{2n+2} = \overline{\omega^{n+1}}$ に注意して

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(\omega^{2n+2} + \omega^{n+1}) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cos\frac{2(n+1)\pi}{3} \end{aligned}$$

$\dfrac{1}{3}(① \times \omega + ② \times \omega^2 + ③)$ より，$\omega^{2n+1} = \overline{\omega^{n+2}}$ に注意して

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n(\omega^{2n+1} + \omega^{n+2}) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \cos\frac{2(n+2)\pi}{3} \end{aligned}$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf $\boxed{5}$ の補足を参照.

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\omega=\omega^2$ とすると　$\omega(\omega-1)=0$　ゆえに　$\omega=0,\ 1$

$\omega=\omega^3$ とすると　$\omega(\omega+1)(\omega-1)=0$　ゆえに　$\omega=0,\pm1$

$\omega^2=\omega^3$ とすると　$\omega^2(\omega-1)=0$　ゆえに　$\omega=0,\ 1$

これらは ω の条件に反するので　$\omega\neq\omega^2,\ \omega\neq\omega^2,\ \omega^2\neq\omega^3$

(b) より，$f(\omega)=0$，$f(\omega^2)=0$，$f(\omega^3)=0$ であるから，$f(x)$ は異なる因数 $x-\omega,\ x-\omega^2,\ x-\omega^3$ を因数にもつ．このとき，x^3 の係数 1 に注意して

$$(*)\quad f(x)=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)$$

さらに，$f(\omega^4)=0$ が成立するから

$$\begin{aligned}(\omega^4-\omega)(\omega^4-\omega^2)(\omega^4-\omega^3)&=0\\ \omega^6(\omega^3-1)(\omega^2-1)(\omega-1)&=0\\ \omega^6(\omega-1)^3(\omega+1)(\omega^2+\omega+1)&=0\end{aligned}$$

$\omega\neq0,\ \pm1$ であるから

$$\omega^2+\omega+1=0\quad\text{これを解いて}\quad\omega=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

(2) $(*)$ は，$\omega^2+\omega+1=0$，$\omega^3=1$ に注意して展開すると

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-1)\\ &=\{x^2-(\omega+\omega^2)x+w^3\}(x-1)\\ &=(x^2+x+1)(x-1)\\ &=\boldsymbol{x^3-1}\end{aligned}$$

(3) $g(x)$ を変形すると

$$g(x)=\sum_{n=0}^{2021}x^n=(x^2+x+1)\sum_{k=0}^{673}x^{3k}$$

これに $x=\omega,\ \omega^2,\ 1$ を代入すると，$\omega^2+\omega+1=0,\ \omega^3=1$ に注意して

$$g(\omega)=(\omega^2+\omega+1)\sum_{k=0}^{673}\omega^{3k}=0$$

$$g(\omega^2)=(\omega^4+\omega^2+1)\sum_{k=0}^{673}\omega^{6k}=0$$

$$g(1)=(1^2+1+1)\sum_{k=0}^{673}1^{3k}=2022$$

$g(x)$ を x^3-1 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とすると

$$g(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

これに $x=\omega,\ \omega^2,\ 1$ を代入すると

$$\begin{aligned} g(\omega)&=a\omega^2+b\omega+c=0 \quad \cdots ① \\ g(\omega^2)&=a\omega+b\omega^2+c=0 \quad \cdots ② \\ g(1)&=a+b+c=2022 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

① + ② + ③ より

$$3c=2022 \quad \text{ゆえに} \quad c=674$$

① $\times\,\omega^2$ + ② $\times\,\omega$ + ③ より

$$3b=2022 \quad \text{ゆえに} \quad b=674$$

① $\times\,\omega$ + ② $\times\,\omega^2$ + ③ より

$$3a=2022 \quad \text{ゆえに} \quad a=674$$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{674x^2+674x+674}$

別解 $2071 = 3 \times 673 + 2$ より

$$g(x) = \sum_{k=0}^{673}(x^{3k} + x^{3k+1} + x^{3k+2}) = (x^2 + x + 1)\sum_{k=0}^{673} x^{3k}$$

$g(x)$ は実数係数の多項式だから，$g(x)$ を $f(x)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax^2 + bx + c$ ($a,\ b,\ c$ は実数) とおけて

$$g(x) = f(x)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$g(1) = 3\displaystyle\sum_{k=0}^{673} 1 = 3 \times 674 = 2022$，$g(\omega) = 0$ であるから ((∗) より)

$$\begin{aligned} g(1) &= f(1)Q(1) + a + b + c = a + b + c = 2022 \qquad \text{(A)} \\ g(\omega) &= f(\omega)Q(\omega) + a\omega^2 + b\omega + c = a(-\omega - 1) + b\omega + c \\ &= (b - a)\omega + c - a = 0 \end{aligned}$$

ω が虚数で $b - a$，$c - a$ は実数であるから

$$b - a = c - a = 0 \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) を解いて　$a = b = c = 674$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{674x^2 + 674x + 674}$