令和 3 年 4 月 18 日 (日) の九数教研修会資料 (熊大) は，次のサイトに掲載します．

http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2021_04_18.zip

令和３年度　熊本大学２次試験前期日程 (数学問題)
文系 (教育学部，医学部保健学科看護学専攻)
理系 (理，薬，工，医保健 (放射線，検査))，医学部医学科
令和３年２月２５日

- **文系** 1 , 2 , 3 , 4 数 I・II・A・B (120 分)
- **理系** 3 , 5 , 6 , 7 数 I・II・III・A・B (120 分)
- **医学部** 8 , 9 , 10 , 11 数 I・II・III・A・B (120 分)

文系 **1** 2 つの関数 $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$，$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の 2 つの交点の x 座標を a，b $(a>b)$ とする。

(1) a，b を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) 実数 t は $t>|a|$ かつ $t>|b|$ を満たすとする。4 つの不等式

$$x \geqq a,\quad y \leqq f(x),\quad y \geqq g(x),\quad x \leqq t$$

を満たす領域の面積を S_1，また，4 つの不等式

$$x \leqq b,\quad y \leqq f(x),\quad y \geqq g(x),\quad x \geqq -t$$

を満たす領域の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の和が (2) の S と等しいときの t の値を求めよ。

文系 **2** 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表されるとする。　　類題 5 8

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) ℓ と辺 AC の交点を X とする。$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ，

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

文系・理系 $\boxed{\mathbf{3}}$ 曲線 $C: y = x^3 - 2x^2 + x$ 上に点 $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ がある。自然数 n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に対して点 P_n から点 P_{n+1} を次のように定める。

点 P_n を接点とする C の接線を ℓ_n とし，C と ℓ_n の共有点のうち，
P_n と異なるものを P_{n+1} とする。

点 P_n の x 座標を a_n とする。

(1) P_2 の座標を求めよ。

(2) 接線 ℓ_n の傾きおよび y 切片をそれぞれ a_n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

文系 $\boxed{\mathbf{4}}$ a を $a > 1$ である実数とする。x についての連立不等式

$$\begin{cases} x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3 < 0 \\ 3x^2 - x < 4a - 12ax \end{cases}$$

の解について考える。連立不等式の解のうち整数であるものの個数を $m(a)$ とする。

(1) 連立不等式を解け。

(2) $a > 2$ のとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。

(3) $m(a) = 4$ となる a の値の範囲を求めよ。

理系 $\boxed{\mathbf{5}}$ 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$$

と表されるとする。 類題 $\boxed{2}$ $\boxed{8}$

(1) ℓ は平面 α 上にあることを示せ。

(2) $\triangle$ABC の各辺と直線 ℓ との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 X について，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(3) A，B の中点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となる点 E を考える。点 O と ℓ 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

理系 $\boxed{6}$ 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。

(1) $\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2$ を w を用いて表せ。　類題 $\boxed{9}$

(2) △ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) △ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ △ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

理系 $\boxed{7}$ 次の問いに答えよ。　類題 $\boxed{11}$

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sin x=\sin 2x$ の解を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx$ を求めよ。

(3) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

(4) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

医医 $\boxed{8}$ 空間の点 O を通らない平面 α をとる。α 上の 3 点 A，B，C は三角形をなすとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。k を 1 より大きい定数とする。直線 ℓ は媒介変数 t を用いて

$$\frac{k}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{tk}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

と表せるとする。ℓ 上を点 X が動くとき，2 点 O，X を通る直線と平面 α の交点 Y の軌跡を m とする。　類題 $\boxed{2}$ $\boxed{5}$

(1) △ABC の各辺と m との交点の個数をそれぞれ求めよ。また，交点がある場合，各交点 Z について，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いてそれぞれ表せ。

(2) A，B の中点を D とする。ℓ を含み α に平行な平面を β とし，O，D を通る直線と平面 β の交点を E とする。点 O と m 上の点 Y を通る直線は 2 点 E，C を通る直線と交点をもつとし，その交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および k を用いて表せ。

医医 $\boxed{9}$ 複素数 w は実部，虚部ともに正であるとする。相異なる複素数 α，β，γ は

$$\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$$

を満たすとする。α，β，γ を表す複素数平面上の点をそれぞれ A，B，C とする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のとりうる範囲を求めよ。 類題 $\boxed{6}$

(2) $\triangle$ABC が正三角形であるときの w の値を求めよ。

(3) $\triangle$ABC が正三角形であるとする。$w=\alpha$ かつ $\triangle$ABC の重心が点 $\dfrac{w^2}{2}$ であるとき，β と γ の値を求めよ。

医医 $\boxed{10}$ 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C: x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}),\quad y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$$

を考える。

(1) 点 M の座標を $(0,\ 1)$ とする。曲線 C 上の点 P に対して，MP を最小にする t の値 t_0 を求めよ。

(2) (1) の t_0 に対する曲線 C 上の点を Q とする。Q における C の接線を ℓ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2) の D を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

医医 $\boxed{11}$ 次の問いに答えよ。 類題 $\boxed{7}$

(1) n を正の整数とするとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

(2) c を正の数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{c} |\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-2x-4$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ について，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x^2-2x-4=\frac{1}{2}x^2-x-2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2)=0$$

よって，2 つの共有点の x 座標は $(a>b)$ $\boldsymbol{a=2,\ b=-1}$

(2) $-1\leqq x\leqq 2$ において

$$g(x)-f(x)=-(x^2-x-2)=-(x+1)(x-2)\geqq 0$$

よって $\quad S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{g(x)-f(x)\}=\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$

(3) (1) の結果から $\quad t>|2| \quad$ かつ $\quad t>|-1| \quad$ すなわち $\quad t>2$

$$S_1=\int_{2}^{t}\{f(x)-g(x)\}\,dx,\quad S_2=\int_{-t}^{-1}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

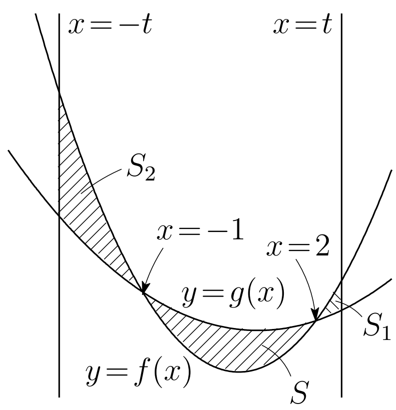
$h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x-2$ とおくと

$$-S=\int_{-1}^{2}h(x)\,dx,\quad S_1=\int_{2}^{t}h(x)\,dx,\quad S_2=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx$$

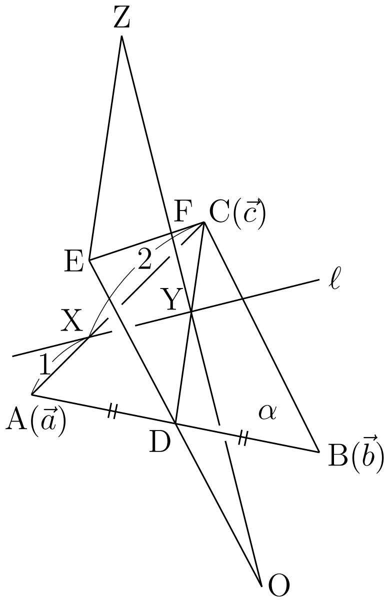
$S_1+S_2=S$ より，$S_2-S+S_1=0$ であるから

$$\begin{aligned}S_2-S+S_1&=\int_{-t}^{-1}h(x)\,dx+\int_{-1}^{2}h(x)\,dx+\int_{2}^{t}h(x)\,dx\\&=\int_{-t}^{t}h(x)\,dx=2\int_{0}^{t}(x^2-2)\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}-2x\right]_0^t\\&=2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)=\frac{2}{3}t(t^2-6)=0\end{aligned}$$

$t>2$ に注意してこれを解くと $\quad \boldsymbol{t=\sqrt{6}}$



2 (1) ℓ 上の点について



$$\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c} \quad \cdots(*)$$

このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)=1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．

(2) X は $(*)$ の $\vec{b}$ の係数が 0 となる点であるから

$$\frac{1}{3}-\frac{t}{3}=0 \quad \text{すなわち} \quad t=1$$

に対応する点であるから $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}}$

(3) ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\dfrac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\overrightarrow{\mathrm{OY}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})-\vec{c}\\&=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c})+\frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c})-(\vec{b}-\vec{c})\}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\frac{t}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3}=\frac{1}{3}-\frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\frac{2}{9}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})=\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{CY}:\mathrm{YD}=4:5 \quad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となる点 Z をとると，条件から

$$\triangle\mathrm{OYD} \backsim \triangle\mathrm{OZE}, \quad \mathrm{YD}:\mathrm{ZE}=1:2 \quad \cdots②$$

①，② および $\triangle\mathrm{CYF} \backsim \triangle\mathrm{EZF}$ より　$\mathrm{CF}:\mathrm{FE}=\mathrm{CY}:\mathrm{ZE}=2:5$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2+5}=\frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線を ℓ とすると

$$y - (t^3 - 2t^2 + t) = (3t^2 - 4t + 1)(x - t)$$

整理すると　$\ell : y = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$x^3 - 2x^2 + x = (3t^2 - 4t + 1)x - 2t^3 + 2t^2$$

整理すると　$(x - t)^2(x + 2t - 2) = 0$　ゆえに　$x = t, -2t + 2$

したがって，C と ℓ の共有点で点 $(t,\ f(f))$ と異なる点は

$$(-2t + 2,\ f(-2t + 2)) \qquad (*)$$

点 $\mathrm{P}_1(2,\ f(2))$ のとき

$$\mathrm{P}_2(-2,\ f(-2)) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{P_2(-2, -18)}$$

(2) ℓ_n は ℓ の方程式において，$t = a_n$ とすればよいから

$$\ell_n : y = (3{a_n}^2 - 4a_n + 1)x - 2{a_n}^3 + 2{a_n}^2$$

よって，ℓ_n の傾き $\boldsymbol{3{a_n}^2 - 4a_n + 1}$，$y$ 切片 $\boldsymbol{-2{a_n}^3 + 2{a_n}^2}$

(3) $\mathrm{P}_1(2,\ 2)$ および $(*)$ から，$a_1 = 2$

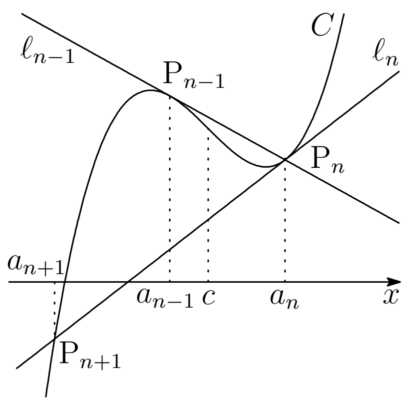
$$a_{n+1} = -2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - \frac{2}{3} = -2\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$$

したがって　$a_n - \dfrac{2}{3} = \left(a_1 - \dfrac{2}{3}\right)(-2)^{n-1}$　よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{4}{3}(-2)^{n-1} + \dfrac{2}{3}}$

補足 3 次関数 $C : y = f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ f(a_n))$ における接線 ℓ_n とする．C と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なるものを $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ f(a_{n+1}))$ とし，C の変曲点の x 座標を c とすると

$$a_{n+1} - c = -2(a_n - c)$$

が成立する．



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\begin{cases} x^3+2ax^2-a^2x-2a^3<0 \\ 3x^2-x<4a-12ax \end{cases}$

第 1 式から　$(x+2a)(x+a)(x-a)<0$

$a>1$ に注意して　$x<-2a,\ -a<x<a$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+4a)(3x-1)<0$

$a>1$ に注意して　$-4a<x<\dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{-4a<x<-2a,\ -a<x<\frac{1}{3}}$$

(2) $m(a)$ を

$$-\frac{1}{3}<x<a,\ 2a<x<4a$$

に含まれる整数の個数として求めてもよい．集合 $P,\ Q$ を

$$P=\{x\,|\,0\leqq x<a,\ x \text{ は整数}\}$$
$$Q=\{x\,|\,2a<x<4a,\ x \text{ は整数}\}$$

とし，集合 $P,\ Q$ の要素の個数をそれぞれ $n(P),\ n(Q)$ とおくと

$$m(a)=n(P)+n(Q)$$

$[a]$ を a 以下の最大の整数とすると

$$(*)\quad n(P)=\begin{cases} [a] & (a \text{ が整数}) \\ [a]+1 & (a \text{ が整数でない}) \end{cases}$$

$s=a-[a]$ とおくと，$a=[a]+s$ より

$$Q=\{x\,|\,2[a]+2s<x<4[a]+4s,\ x \text{ は整数}\}$$

(i) $s=0$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a]-1,\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-1-(2[a]+1)+1=2[a]-1$$

(ii) $0<s\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき

$$Q=\{x\,|\,2[a]+1\leqq x\leqq 4[a],\ x \text{ は整数}\}$$
$$n(Q)=4[a]-(2[a]+1)+1=2[a]$$

(iii) $\dfrac{1}{4} < s < \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} Q &= \{x \mid 2[a]+1 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\} \\ n(Q) &= 4[a]+1-(2[a]+1)+1 = 2[a]+1 \end{aligned}$$

(iv) $s = \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} Q &= \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+1,\ x \text{ は整数}\} \\ n(Q) &= 4[a]+1-(2[a]+2)+1 = 2[a] \end{aligned}$$

(v) $\dfrac{1}{2} < s \leqq \dfrac{3}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} Q &= \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+2,\ x \text{ は整数}\} \\ n(Q) &= 4[a]+2-(2[a]+2)+1 = 2[a]+1 \end{aligned}$$

(vi) $\dfrac{3}{4} < s < 1$ のとき

$$\begin{aligned} Q &= \{x \mid 2[a]+2 \leqq x \leqq 4[a]+3,\ x \text{ は整数}\} \\ n(Q) &= 4[a]+3-(2[a]+2)+1 = 2[a]+2 \end{aligned}$$

$(*)$ および (i)〜(vi) から

$$(**) \quad m(a) = \begin{cases} 3[a]-1 & (s=0) \\ 3[a]+1 & (0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2}) \\ 3[a]+2 & (\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < s \leqq \frac{3}{4}) \\ 3[a]+3 & (\frac{3}{4} < s < 1) \end{cases}$$

$a > 2$ より，$2 < a \leqq \dfrac{9}{4}$，$a = \dfrac{5}{2}$ のとき，$m(a)$ は最小値 **7** をとる．

(3) $m(a) = 4$ となるのは，$(**)$ より

$$3[a]+1 = 4, \quad 0 < s \leqq \frac{1}{4},\ s = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{1 < a \leqq \frac{5}{4},\ a = \frac{3}{2}}$$

5 (1) ℓ 上の点 X について

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})+\frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=\frac{2t}{3}\vec{a}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b}+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

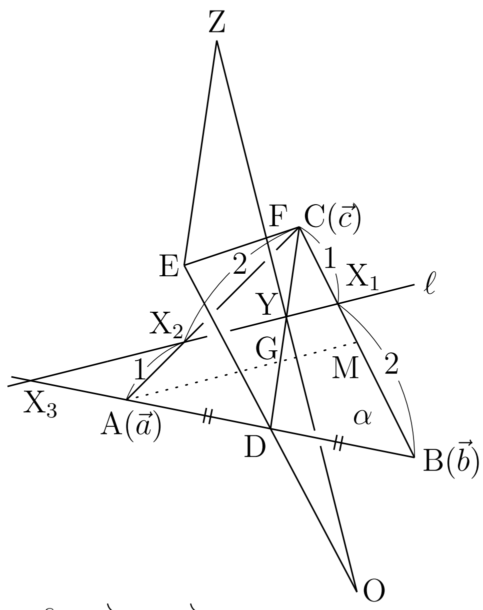
このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)=1$$

よって，ℓ は平面 α 上の点である．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数が 0 となる点をそれぞれ X_1，X_2，X_3 とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_1}}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OX_2}}=\frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX_3}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$



直線 ℓ と △ABC の各辺との交点の個数について，辺 BC 上は X_1 の **1 個**，辺 CA 上は X_2 の **1 個**，辺 AB 上は **0 個**．

(3) Y は CD 上の点であるから $\overrightarrow{\mathrm{CY}}=s\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ (s は実数)

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=3\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$ を代入すると $\overrightarrow{\mathrm{CY}}=\frac{3s}{4}\overrightarrow{\mathrm{CX_2}}+\frac{3s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CX_1}}$

Y は直線 $\mathrm{X_1X_2}$ 上の点であるから $\frac{3s}{4}+\frac{3s}{2}=1$

これを解いて $s=\frac{4}{9}$ すなわち $\mathrm{CY}:\mathrm{YD}=4:5$ $\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ となる点 Z をとると，条件から

$$\triangle\mathrm{OYD}\backsim\triangle\mathrm{OZE},\quad \mathrm{YD}:\mathrm{ZE}=1:2\quad\cdots②$$

①，② および $\triangle\mathrm{CYF}\backsim\triangle\mathrm{EZF}$ より $\mathrm{CF}:\mathrm{FE}=\mathrm{CY}:\mathrm{ZE}=2:5$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{OC}}+2\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2+5}=\frac{5\vec{c}+2(\vec{a}+\vec{b})}{7}=\boldsymbol{\frac{1}{7}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

別解 $\mathrm{X_3}$ は線分 AB を $1:4$ に外分する点，D は AB の中点であるから

$$\mathrm{X_3A : AB} = 1:3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{X_3A : AD} = 2:3$$

$\triangle\mathrm{CAD}$ と直線 ℓ について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CX_2}}{\mathrm{X_2A}}\cdot\frac{\mathrm{AX_3}}{\mathrm{X_3D}}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1$$

したがって　$\mathrm{CY : YD} = 4:5$　　(以下同様)

別解 ℓ 上の点 Y について，$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \dfrac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \dfrac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \overrightarrow{\mathrm{OY}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} &= \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}) - \vec{c} \\
&= \frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{c}) + \frac{t}{3}\{2(\vec{a}-\vec{c}) - (\vec{b}-\vec{c})\} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{t}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{CA}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \frac{2t}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{CB}}
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})$ と平行であるから

$$\frac{2t}{3} = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} \quad \text{これを解いて} \quad t = \frac{1}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \dfrac{2}{9}(\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}) = \dfrac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$　すなわち　$\mathrm{CY : YD} = 4:5$　(以下同様)

補足 直線 ℓ について

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

BC の中点を M とすると，この直線の方向ベクトル $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ は

$$2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c} = -\{(\vec{b}-\vec{a}) + (\vec{c}-\vec{a})\} = -(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

したがって，ℓ は中線 AM と平行である．
2 つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心であるから

$$\mathrm{CG : GD} = 2:1$$

$\ell /\!/ \mathrm{AM}$ であるから　$\mathrm{CY : YG} = \mathrm{CX_2 : X_2A} = 2:1$

$$\mathrm{CD : CY} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9:4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CY : YD} = 4:5$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\{(w+2)\alpha\}^2+(w\beta)^2-(2\gamma)^2=4(w+2)\alpha^2+2w^2\alpha\beta-8\alpha\gamma$

これを w について整理すると

$$w^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=4(\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)$$
$$w^2(\beta-\alpha)^2=4(\gamma-\alpha)^2$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数であるから

$$\boldsymbol{\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2=\frac{w^2}{4}}$$

(2) (1) の結果から $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\pm\dfrac{w}{2}$

w の実部，虚部はともに正であるから $0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}$

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\dfrac{w}{2}$ のとき $\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(\dfrac{w}{2}\right)=\arg w$

$$0<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{\pi}{2}$$

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\dfrac{w}{2}$ のとき $\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\arg\left(-\dfrac{w}{2}\right)=\arg w+\pi$

$$\pi<\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)<\frac{3}{2}\pi$$

△ABC が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad かつ \quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{5}{3}\pi$ は，(i)，(ii) ともに満たさない．

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ は (i) を満たし，このとき

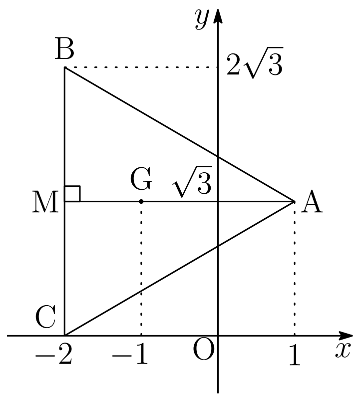
$$\left|\frac{w}{2}\right|=\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1 \quad かつ \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right)=\arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\frac{\pi}{3}$$

したがって (∗) $\dfrac{w}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ よって $\boldsymbol{w=1+\sqrt{3}i}$

(3) $(*)$ より

$$\alpha = 2\cdot\frac{w}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$$

$$\frac{w^2}{2} = 2\left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1+\sqrt{3}i$$



BC の中点を M とすると　$\mathrm{M}(-2+\sqrt{3}i)$

$\mathrm{AM}=3$ より　$\mathrm{BM}=\mathrm{CM}=\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{\beta = -2+2\sqrt{3}i,\ \gamma = -2}$

$\boxed{7}$ (1) $\sin x = \sin 2x$ より

$$\sin x = 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x(1-2\cos x)=0$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，これを解くと　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi}$

(2) $f(x) = \sin x - \sin 2x$ とし，$I = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ とおくと

$$I = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx$ について，$x = 2\pi - u$ とおくと

$$\frac{dx}{du} = -1$$

x	$\pi \longrightarrow 2\pi$
u	$\pi \longrightarrow 0$

$$f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) - \sin 2(2\pi - x) = -\sin x + \sin 2x = -f(x)$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_{\pi}^{0} |f(2\pi - u)|\,(-1)du = \int_0^{\pi} |f(u)|\,du = \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

したがって

$$I = 2\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$$

$f(x)=\sin x(1-2\cos x)$ より　$|f(x)|=\begin{cases} -f(x) & (0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}) \\ f(x) & (\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \pi) \end{cases}$

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{I}{2} &= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} f(x)\,dx = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= F(0)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)+F(\pi)=-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

よって　　$I=2\times\dfrac{5}{2}=\mathbf{5}$

(3) $I_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ とおく．

$t=nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx}=n$

x	$0 \longrightarrow\ 2\pi$
t	$0 \longrightarrow 2n\pi$

$$I_n=\int_0^{2n\pi}|\sin t-\sin 2t|\,\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数であるから，(2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\,dx=\frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx \\ &= \int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx=I=\mathbf{5}\end{aligned}$$

(4) $J_n = \displaystyle\int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると $\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(t)|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (2) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx < \frac{1}{n}\int_0^{2(N+1)} |f(x)|\,dx$$

$$\frac{1}{n}\cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n}\cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より $\dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N + 1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

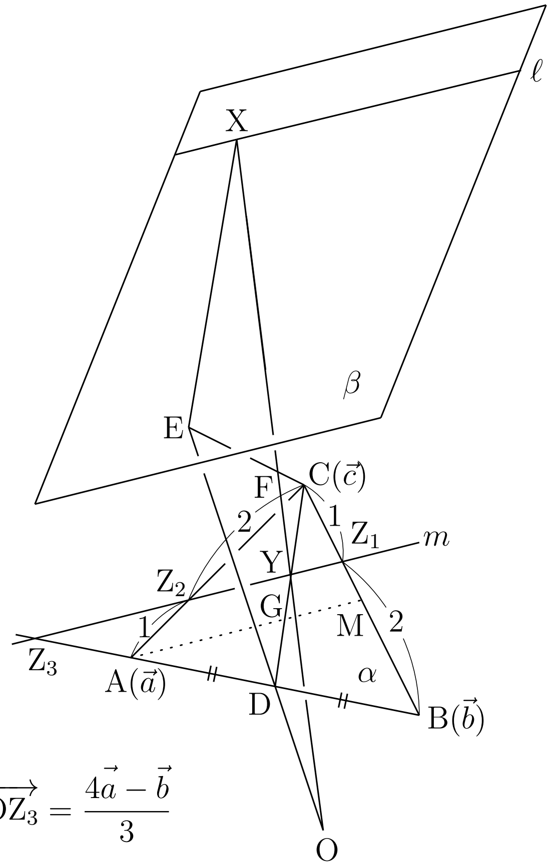
$$\frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} - 1\right) < J_n < \frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} + 1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により $\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) ℓ 上の点 X について，$k \neq 0$ より



$$\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$
$$= \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

このとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$\frac{2t}{3} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right) = 1$$

これから，$\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ は α 上の点であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{2t}{3}\vec{a} + \left(\frac{1}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数が 0 となる点をそれぞれ Z_1，Z_2，Z_3 とすると

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OZ_1}} = \frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}},\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OZ_2}} = \frac{2\vec{a}+\vec{c}}{3}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OZ_3}} = \frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

直線 m と $\triangle$ABC の各辺との交点の個数について，辺 BC 上は Z_1 の **1** 個，辺 CA 上は Z_2 の **1** 個，辺 AB 上は **0** 個.

(2) Y は CD 上の点であるから $\overrightarrow{\mathrm{CY}} = s\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \dfrac{s}{2}(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}})$ （s は実数）

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CZ_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{CZ_1}}$ を代入すると $\overrightarrow{\mathrm{CY}} = \dfrac{3s}{4}\overrightarrow{\mathrm{CZ_2}} + \dfrac{3s}{2}\overrightarrow{\mathrm{CZ_1}}$

Y は直線 $\mathrm{Z_1Z_2}$ 上の点であるから $\dfrac{3s}{4} + \dfrac{3s}{2} = 1$

これを解いて $s = \dfrac{4}{9}$ すなわち CY : YD = 4 : 5 $\cdots$①

条件から $\triangle$OYD $\backsim$ $\triangle$OXE (1) の結果から YD : XE = 1 : k $\cdots$②

①，② および $\triangle$CYF $\backsim$ $\triangle$EXF より CF : FE = CY : XE = 4 : $5k$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = k\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{5k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+4\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{4+5k} = \frac{5k\vec{c}+4\cdot\frac{k}{2}(\vec{a}+\vec{b})}{4+5k} = \boldsymbol{\frac{k}{5k+4}(2\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c})}$$

別解 $\mathrm{Z_3}$ は線分 AB を 1 : 4 に外分する点，D は AB の中点であるから

$$\mathrm{Z_3A : AB} = 1:3 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Z_3A : AD} = 2:3$$

$\triangle\mathrm{CAD}$ と直線 m について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{CZ_2}}{\mathrm{Z_2A}}\cdot\frac{\mathrm{AZ_3}}{\mathrm{Z_3D}}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{YC}} = 1$$

したがって　$\mathrm{CY : YD} = 4:5$　　(以下同様)

補足 直線 m について

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c}) + \frac{t}{3}(2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})$$

BC の中点を M とすると，この直線の方向ベクトル $2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ は

$$2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c} = -\{(\vec{b}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\} = -(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$$

したがって，m は中線 AM と平行である．
2 つの中線 AM と CD の交点 G は $\triangle$ABC の重心であるから

$$\mathrm{CG : GD} = 2:1$$

$m/\!/\mathrm{AM}$ であるから　$\mathrm{CY : YG} = \mathrm{CZ_2 : Z_2A} = 2:1$

$$\mathrm{CD : CY} = 1 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 9:4 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CY : YD} = 4:5$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1)　$\{(w+2)\alpha\}^2 + (w\beta)^2 - (2\gamma)^2 = 4(w+2)\alpha^2 + 2w^2\alpha\beta - 8\alpha\gamma$

これを w について整理すると

$$w^2(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = 4(\gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2)$$
$$w^2(\beta-\alpha)^2 = 4(\gamma-\alpha)^2$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数であるから

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 = \frac{w^2}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \pm\frac{w}{2}$$

w の実部，虚部はともに正であるから　$0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}$

(i) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \arg\left(\dfrac{w}{2}\right) = \arg w$

$$0 < \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) < \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = -\dfrac{w}{2}$ のとき　$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \arg\left(-\dfrac{w}{2}\right) = \arg w + \pi$

$$\pi < \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) < \frac{3}{2}\pi$$

$\theta = \arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$ であるから $(0 \leqq \theta < 2\pi)$

$$\boldsymbol{0 < \theta < \frac{\pi}{2},\quad \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}$$

(2) △ABC が正三角形であるとき

$$\left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1 \quad かつ \quad \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$$

$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \dfrac{5}{3}\pi$ は，(i)，(ii) ともに満たさない．

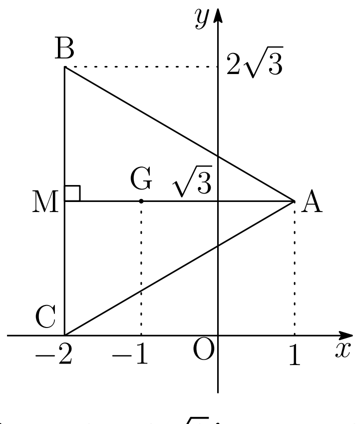
$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ は (i) を満たし，このとき

$$\left|\frac{w}{2}\right| = \left|\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right| = 1 \quad かつ \quad \arg\left(\frac{w}{2}\right) = \arg\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right) = \frac{\pi}{3}$$

したがって　$(*)$　$\dfrac{w}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$　　よって　$\boldsymbol{w = 1 + \sqrt{3}i}$

(3) $(*)$ より

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\cdot\frac{w}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1 + \sqrt{3}i \\ \frac{w^2}{2} &= 2\left(\frac{w}{2}\right)^2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$



BC の中点を M とすると　$\mathrm{M}(-2 + \sqrt{3}i)$

$\mathrm{AM} = 3$ より　$\mathrm{BM} = \mathrm{CM} = \sqrt{3}$　　よって　$\boldsymbol{\beta = -2 + 2\sqrt{3}i,\ \gamma = -2}$

10 (1) 媒介変数 t を用いて表された曲線

$$C : x = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}), \quad y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \qquad (*)$$

は，(**) $x = \sqrt{y^2 + 1}$ である．C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と $\mathrm{M}(0,\ 1)$ の距離は

$$\mathrm{MP}^2 = x^2 + (y-1)^2 = y^2 + 1 + (y-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

MP が最小となるとき，$y = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad e^{2t} - e^t - 1 = 0$$

$e^t > 0$ に注意して　$e^t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　よって　$\boldsymbol{t_0 = \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

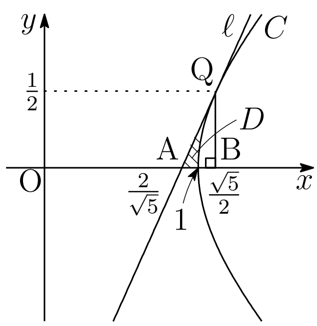
(2) $y = \dfrac{1}{2}$ を (**) を代入して　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$x^2 - y^2 = 1$ であるから

$$2x - 2yy' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad yy' = x$$

C 上の点 Q における接線 ℓ の傾きは

$$\frac{1}{2}y' = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y' = \sqrt{5}$$



したがって，ℓ の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{5}\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{5}x - 2$$

ℓ と x 軸の交点を A とする．Q から x 軸に垂線 QB を引くと

$$\triangle\mathrm{QAB} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{40}$$

(*) の定積分 $\displaystyle\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx$ について　$\dfrac{1}{2}(e^{t_0} + e^{-t_0}) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{1}{2}(e^{t_0} - e^{-t_0}) = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$$

x	$1 \longrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2}$
t	$0 \longrightarrow t_0$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{t_0} \left(e^t - e^{-t}\right)^2\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{t_0}(e^{2t}-2+e^{-2t})\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2t} - 2t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{t_0}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(e^{t_0}+e^{-t_0})\cdot\frac{1}{2}(e^{t_0}-e^{-t_0}) - \frac{1}{2}t_0$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって，領域 D の面積を S とすると

$$S = \triangle\mathrm{QAB} - \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{40} - \left(\frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}}$$

別解 $\sqrt{x^2-1}$ の積分 (一般には，$\sqrt{x^2+A}$ の積分)[1]

$$(x\sqrt{x^2-1})' = \sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\{\log(x+\sqrt{x^2-1}\}' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\}' = 2\sqrt{x^2-1}$$

したがって　$\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\{x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\} + C$

$$\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} y\,dx = \int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\,x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})\,\Big]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (\text{以下同様})$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_kiseki_ri.pdf (p.162 (物理ページ p.167))

(3) 曲線 $C : x = \sqrt{y^2+1}$ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1 とすると

$$V_1 = \pi\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dy = \pi\int_0^{\frac{1}{2}}(y^2+1)\,dx = \pi\left[\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{13}{24}\pi$$

ℓ と x 軸，y 軸，直線 $y = \dfrac{1}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる円錐台の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}\frac{1}{2} = \frac{61}{120}\pi$$

求める回転体の体積を V とすると

$$V = \frac{13}{24}\pi - \frac{61}{120}\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{30}}$$

補足 上面の半径 a，底面の半径 b，高さ h の円錐台の体積は [2]

$$\frac{\pi}{3}(a^2+ab+b^2)h$$

別解 $\triangle$QAB を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_3 とすると

$$V_3 = \pi\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\frac{1}{2} - V_2 = \frac{5}{8}\pi - \frac{61}{120}\pi = \frac{7}{60}\pi$$

曲線 $C : y = \sqrt{x^2-1}$ と x 軸，直線 $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_4 とすると，バウムクーヘン型の求積法により [3]

$$V_4 = 2\pi\int_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{2\pi}{3}\left[(x^2-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\pi}{12}$$

よって　$V = V_3 - V_4 = \dfrac{7}{60}\pi - \dfrac{\pi}{12} = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{30}}$

補足 $\triangle$QAB の重心の x 座標は　$\dfrac{1}{3}\left(1\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} + 2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

V_3 は，パップス=ギュルダンの定理により [4]

$$V_3 = 2\pi\cdot\frac{7\sqrt{5}}{15}\cdot\triangle\mathrm{QAB} = 2\pi\cdot\frac{7\sqrt{5}}{15}\cdot\frac{\sqrt{5}}{40} = \frac{7}{60}\pi$$

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2019.pdf (p.4)
[3] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$
[4] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf $\boxed{1}$

バウムクーヘン型求積法

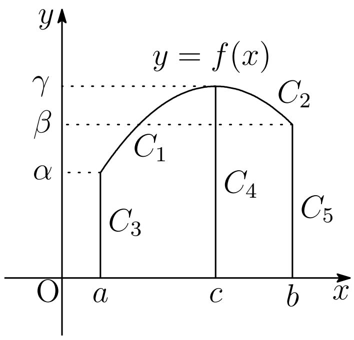
次の回転体の体積について，円筒形に区分して考えると積分の意味が理解できる．

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)\,dx$$

証明 $y=f(x)$ のグラフを単調増加または単調減少の区間に分けて証明する．例えば，右の図のように $y=f(x)$ は $a \leqq x \leqq c$ で単調増加，$c \leqq x \leqq b$ では単調減少とする．このとき，それぞれの区間で逆関数が存在することから



$$C_1 : x = g_1(y)\ (\alpha \leqq y \leqq \gamma),$$
$$C_2 : x = g_2(y)\ (\beta \leqq y \leqq \gamma)$$

とおき，さらに次のようにおく．

$$C_3 : x = a\ (0 \leqq y \leqq \alpha),\quad C_4 : x = c\ (0 \leqq y \leqq \gamma),\quad C_5 : x = b\ (0 \leqq y \leqq \beta)$$

x 軸と C_1，C_3，C_4 で囲まれた部分および C_2，C_4，C_5 で囲まれた部分をそれぞれ y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V_1}{\pi} &= \int_0^\gamma c^2\,dy - \int_0^\alpha a^2\,dy - \int_\alpha^\gamma \{g_1(y)\}^2\,dy \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \int_a^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= c^2\gamma - a^2\alpha - \Big[\, x^2 f(x)\,\Big]_a^c + 2\int_a^c xf(x)\,dx = 2\int_a^c xf(x)\,dx \\
\frac{V_2}{\pi} &= \int_0^\beta b^2\,dy + \int_\beta^\gamma \{g_2(y)\}^2\,dy - \int_0^\gamma c^2\,dy \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \int_b^c x^2 f'(x)\,dx \\
&= b^2\beta - c^2\gamma + \Big[\, x^2 f(x)\,\Big]_b^c - 2\int_b^c xf(x)\,dx = 2\int_c^b xf(x)\,dx
\end{aligned}$$

よって　$V = V_1 + V_2 = 2\pi\displaystyle\int_a^c xf(x)\,dx + 2\pi\int_c^b xf(x)\,dx = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$

一般に，単調増加・単調減少の区間に分けることで上の結果を得る．　　証終

11 (1) $I_n=\int_0^{2\pi}|\sin nx-\sin 2nx|\,dx$ とおく．

$t=nx$ とすると $\dfrac{dt}{dx}=n$

x	$0\longrightarrow\ 2\pi$
t	$0\longrightarrow 2n\pi$

$$I_n=\int_0^{2n\pi}|\sin t-\sin 2t|\,\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|\sin x-\sin 2x|\,dx \qquad (*)$$

ここで，$f(x)=\sin x-\sin 2x$ とし，$f(x)$ の原始関数の 1 つを
$F(x)=-\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$ とおく．

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)-\sin 2(x+2\pi)=f(x),$$
$$f(2\pi-x)=\sin(2\pi-x)-\sin 2(2\pi-x)=-\sin x+\sin 2x=-f(x)$$

$f(x)$ は周期 2π の周期関数で，$|f(2\pi-x)|=|f(x)|$ であるから

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{n}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\,dx=\frac{1}{n}\cdot n\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx\\&=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx$ について，$x=2\pi-u$ とおくと $\dfrac{dx}{du}=-1$

x	$\pi\longrightarrow 2\pi$
u	$\pi\longrightarrow\ 0$

$$\int_{\pi}^{2\pi}|f(x)|\,dx=\int_{\pi}^{0}|f(2\pi-u)|\,(-1)du=\int_0^{\pi}|f(u)|\,du=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$$

したがって $\quad I_n=2\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx$

$f(x)=\sin x(1-2\cos x)$ より $\quad |f(x)|=\begin{cases}-f(x) & (0\leqq x\leqq \frac{\pi}{3})\\ f(x) & (\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq \pi)\end{cases}$

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{2}&=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}f(x)\,dx=-\Big[\,F(x)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\Big[\,F(x)\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\\&=F(0)-2F\left(\frac{\pi}{3}\right)+F(\pi)=-\frac{1}{2}-2\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

よって $\qquad I_n=2\times\dfrac{5}{2}=\mathbf{5}$

(2) $J_n = \displaystyle\int_0^c |\sin nx - \sin 2nx|$ とおく．

$t = nx$ とすると　$\dfrac{dt}{dx} = n$

x	$0 \longrightarrow c$
t	$0 \longrightarrow nc$

$$J_n = \int_0^{nc} |\sin t - \sin 2t| \frac{1}{n} dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(t)|\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx$$

$\dfrac{nc}{2\pi}$ 以下の最大の整数を N とすると

$$(**) \quad N \leqq \frac{nc}{2\pi} < N+1 \quad \text{ゆえに} \quad 2N\pi \leqq nc < 2(N+1)\pi$$

$(*)$ および (1) の結果により，$I_N = \dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5$ であるから

$$\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx = 5N$$

したがって

$$\frac{1}{n}\int_0^{2N\pi} |f(x)|\,dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^{nc} |f(x)|\,dx < \frac{1}{n}\int_0^{2(N+1)} |f(x)|\,dx$$

$$\frac{1}{n}\cdot 5N \leqq J_n < \frac{1}{n}\cdot 5(N+1)$$

$(**)$ より　$\dfrac{nc}{2\pi} - 1 < N$，$N+1 \leqq \dfrac{nc}{2\pi} + 1$ であるから

$$\frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} - 1\right) < J_n < \frac{5}{n}\left(\frac{nc}{2\pi} + 1\right)$$

$$\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n} < J_n < \frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}$$

このとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} - \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5c}{2\pi} + \frac{5}{n}\right) = \frac{5c}{2\pi}$

よって，はさみうちの原理により　$\boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \frac{5c}{2\pi}}$