

## 第6回算数・数学教育研修会

### 難関大入試問題研究

代々木ゼミナール福岡校

令和2年4月19日

湧心館高等学校

教諭 西村信一

## 1 はじめに

令和2年4月19日(日)に代々木ゼミナール福岡校(博多駅前)で九州数学教育会が主催する「第6回算数・数学教育研修(入試問題研究)」にて、主要難関大学令和2年度入試問題解説(東大・京大・東工大)を予定していたが、新型コロナウイルス感染拡大防止の一環として開催されなかったため、本ファイルにて報告を行うものある。これらの問題・解答については、次のサイトに掲載している。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

また令和2年度九州地区主要大学一般前期・後期試験問題(数学)についても問題および解答を同サイトに掲載している。

## 2 解説

難関大学の入試問題の解説について、独自の解説を与えたものについてその問題の背景について述べていく。

- 京都大学(理系3番・文系4番)の別解として、グラム・シュミットの正規直交化法(Gram-Schmidt orthonormalization)の考えを利用しているが、設問に配慮した基底の取り方を行っている。
- 東京工業大学4番について、直交変換による解答を与えている。直線 $l: x+y=0$ の周りの図形 $D_n$ の回転体の体積について、 $l$ からの高さ関数とするより、明確に $l$ を $X$ 軸、これに垂直な $Y$ 軸を設定した直交変換を行っている。また、パップス・ギュルダンの定理(Pappus-Guldinus theorem)を使った求積法も紹介した。
- 東京大学理系6番(2)は、幾何の問題と捉えた別解を与えた。楕円の法線群の包絡線(縮閉線と一致する)がアステロイド(astroid)<sup>1</sup>を $y$ 軸を元に拡張したものであり、その内部の点から(境界線を含まない)4本の法線が引ける。この問題の核心に着目した別解を与えた。

<sup>1</sup>星芒形, 星形, 四尖点形などおよびことがある。

- 東京工業大学 6 番について、教科書にある部分積分法の公式は漸化式である。このことを利用した。  $f(x)$  の  $n$  次導関数が  $f^{(n)}$  であるように、  $f(x)$  を  $n$  回積分したものを第  $n$  次原始関数  $f^{(-n)}(x)$  と定義すると (実際にはこのような定義はない)、漸化式を順次適用することで、次式を得る。

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - f^{(1)}(x)g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-2)}(x) \\ \dots + (-1)^n f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x)g^{(-n)}(x) dx$$

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - f^{(-1)}(x)g^{(1)}(x) + f^{(-2)}(x)g^{(2)}(x) \\ \dots + (-1)^n f^{(-n)}(x)g^{(n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(-n)}(x)g^{(n+1)}(x) dx$$

- 東京大学理系 3 番は、ベータ関数に由来する積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

に  $m = n = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$  を代入することでも求めることができる。

この積分については、東北大学理系 6 番でも次の定積分が出題された。

$$A(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \sin^n x dx$$

において、  $t = \sin^2 x$  とおくと  $\frac{dt}{dx} = 2 \sin x \cos x$

$x$		$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
$t$		$0 \rightarrow 1$

$$A(m, n) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} (2 \sin x \cos x) dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{\frac{m-1}{2}! \frac{n-1}{2}!}{2 \cdot \frac{m+n}{2}!}$$

例えば  $A(2, 5) = \frac{\frac{1}{2}! 2!}{2 \cdot \frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2}!} = \frac{\frac{1}{2}!}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!} = \frac{1}{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{8}{105}$

$$A(2, 6) = \frac{\frac{1}{2}! \frac{5}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{\frac{1}{2}! \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}!}{2 \cdot 4!} = \frac{5}{64} \left( \frac{1}{2}! \right)^2$$

これに  $\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  を代入すると<sup>2</sup>  $A(2, 6) = \frac{5}{256} \pi$

<sup>2</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai\\_ri\\_2020.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf) (p.8 を参照)

### 3 微分幾何学的考察

#### 3.1 法線群の包絡線

$t$  を変数とする曲線  $C(x(t), y(t))$  の 2 点  $A(x(\alpha), y(\alpha))$ ,  $B(x(\beta), y(\beta))$  における法線の方程式は ( $\alpha \neq \beta$ ), それぞれ

$$x'(\alpha)(x - x(\alpha)) + y'(\alpha)(y - y(\alpha)) = 0 \quad (\text{A1})$$

$$x'(\beta)(x - x(\beta)) + y'(\beta)(y - y(\beta)) = 0 \quad (\text{A2})$$

であり, これから

$$x'(\alpha)x + y'(\alpha)y = x(\alpha)x'(\alpha) + y(\alpha)y'(\alpha) \quad (\text{B1})$$

$$x'(\beta)x + y'(\beta)y = x(\beta)x'(\beta) + y(\beta)y'(\beta) \quad (\text{B2})$$

(B2) - (B1) より

$$\begin{aligned} & \{x'(\beta) - x'(\alpha)\}x + \{y'(\beta) - y'(\alpha)\}y \\ & \quad = x(\beta)x'(\beta) - x(\alpha)x'(\alpha) + y(\beta)y'(\beta) - y(\alpha)y'(\alpha) \\ & \frac{x'(\beta) - x'(\alpha)}{\beta - \alpha}x + \frac{y'(\beta) - y'(\alpha)}{\beta - \alpha}y \\ & \quad = \frac{x(\beta)x'(\beta) - x(\alpha)x'(\alpha)}{\beta - \alpha} + \frac{y(\beta)y'(\beta) - y(\alpha)y'(\alpha)}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

上式において,  $\beta \rightarrow \alpha$  とすると

$$x''(\alpha)x + y''(\alpha)y = x'(\alpha)^2 + x(\alpha)x''(\alpha) + y'(\alpha)^2 + y(\alpha)y''(\alpha) \quad (\text{C})$$

(A1), (C) を連立すると

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha) - \frac{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}{x'(\alpha)y''(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)}y'(\alpha), \\ y &= y(\alpha) + \frac{x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2}{x'(\alpha)y''(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)}x'(\alpha) \end{aligned}$$

一般に,  $C(x(t), y(t))$  に対応する点

$$\left( x(t) - \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}y'(t), y(t) + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}x'(t) \right)$$

が描く軌跡が法線群の包絡線である. また点  $P(x(t), y(t))$  における曲率円 (接触円) の中心でもある. 曲率円とは, 曲線上の 3 点  $P, Q, R$  について,  $Q, R$  が曲線上を  $P$  に限りなく近づくとときに占める極限の位置の円である. その中心を曲率中心という. 曲率中心の描く軌跡を縮閉線といい, 法線群の包絡線と一致する.

### 3.2 曲率中心・縮閉線

曲線  $C(x(t), y(t))$  上に 3 点  $P(x(\alpha), y(\alpha))$ ,  $Q(x(\beta), y(\beta))$ ,  $R(x(\gamma), y(\gamma))$  をとる ( $\alpha < \beta < \gamma$ ). 3 点  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  を通る円を

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

とし,  $t$  の関数を

$$f(t) = (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 - r^2$$

とすると,  $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$  であるから, ロルの定理により

$$f'(c_1) = 0, \quad f'(c_2) = 0 \quad (\alpha < c_1 < \beta, \quad \beta < c_2 < \gamma)$$

を満たす  $c_1, c_2$  が存在する.  $f'(c_1) = f'(c_2)$  より, さらにロルの定理を用いると

$$f''(c_3) = 0 \quad (c_1 < c_3 < c_2)$$

$Q, R$  が  $P$  に限りなく近づくと,  $\beta \rightarrow \alpha, \gamma \rightarrow \alpha$  となるから, 上の諸式において

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) = 0$$

$f'(t), f''(t)$  は

$$f'(t) = 2x'(t)(x(t) - a) + 2y'(t)(y(t) - b)$$

$$f''(t) = 2x''(t)(x(t) - a) + 2x''(t)^2 + 2y''(t)(y(t) - b) + 2y'(t)^2$$

一般に, 点  $(x(t), y(t))$  に対する曲率中心  $(a, b)$  は,  $f'(t) = f''(t) = 0$  より

$$x'(t)(a - x(t)) + y'(t)(b - y(t)) = 0,$$

$$x''(t)(a - x(t)) + y''(t)(b - y(t)) = x''(t)^2 + y''(t)^2$$

ゆえに 
$$a - x(t) = -\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}y'(t)$$

$$b - y(t) = \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}x'(t)$$

上の結果を  $f(t) = 0$  に代入すると

$$r = \frac{\{x'(t)^2 + y'(t)^2\}^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}$$

曲率中心  $(a, b)$  は

$$a = x(t) - \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}y'(t), \quad b = y(t) + \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}x'(t)$$

### 3.3 楕円

楕円  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  について

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -a \sin \theta, & \frac{dy}{d\theta} &= b \cos \theta \\ \frac{d^2x}{d\theta^2} &= -a \cos \theta, & \frac{d^2y}{d\theta^2} &= -b \sin \theta \end{aligned}$$

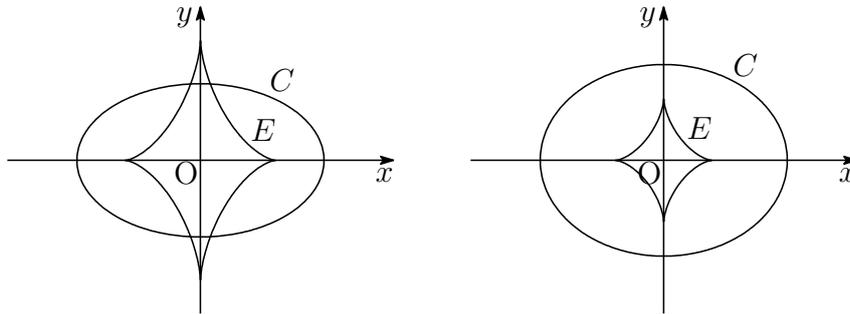
したがって,  $(a \cos \theta, b \sin \theta)$  における曲率中心は

$$\left( \frac{(a^2 - b^2) \cos^3 \theta}{a}, -\frac{(a^2 - b^2) \sin^3 \theta}{b} \right)$$

また,  $C$  の縮閉線  $E$  は

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ) の離心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  を用いると,  $E$  の  $x$  軸上の尖点の座標は  $(\pm ae^2, 0)$  であり,  $C$  の焦点  $(\pm ae, 0)$ , 頂点  $(\pm a, 0)$ , 準線  $x = \pm \frac{a}{e}$  との関係も興味深い.  $E$  の尖点  $(\pm ae^2, 0)$  は,  $C$  の頂点  $(\pm a, 0)$  における曲率中心である (複号同順).  $E$  はアステロイド (星芒形, 星形, 四尖点形とも呼ばれている) を  $y$  軸方向に拡張したものである.  $a > b$  のとき, 楕円  $C$  とその縮閉線  $E$  は次のようになる.  $\frac{b}{a}$  が 1 に近づくと (楕円が円に近づく),  $E$  の内部領域は小さくなる.



$C$ の点	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
$E$ の点	第 4 象限	第 3 象限	第 2 象限	第 1 象限

### 3.4 双曲線

双曲線  $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  について

$$x = \frac{a}{\cos \theta}, \quad y = b \tan \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}, & \frac{dy}{d\theta} &= \frac{b}{\cos^2 \theta} \\ \frac{d^2x}{d\theta^2} &= \frac{a(1 + \sin^2 \theta)}{\cos^3 \theta}, & \frac{d^2y}{d\theta^2} &= \frac{2b \sin \theta}{\cos^3 \theta} \end{aligned}$$

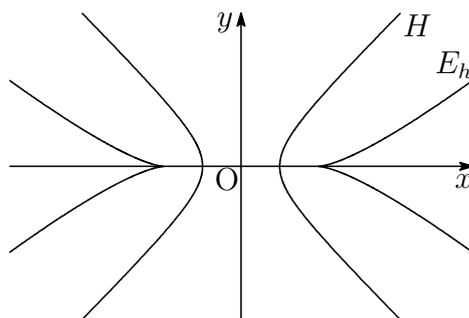
したがって、 $\left(\frac{a}{\cos \theta}, b \tan \theta\right)$  における曲率中心は

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a \cos^3 \theta}, -\frac{(a^2 + b^2) \tan^3 \theta}{b}\right)$$

また、 $C$  の縮閉線  $E_h$  は

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ) の離心率  $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$  を用いると、 $E_h$  の  $x$  軸上の尖点の座標は  $(\pm ae^2, 0)$  であり、 $C$  の焦点  $(\pm ae, 0)$ 、頂点  $(\pm a, 0)$ 、準線  $x = \pm \frac{a}{e}$  との関係も興味深い。 $E_h$  の尖点  $(\pm ae^2, 0)$  は、 $H$  の頂点  $(\pm a, 0)$  における曲率中心である (複号同順)。



$H$ の点	第1象限	第2象限	第3象限	第4象限
$E_h$ の点	第4象限	第3象限	第2象限	第1象限

### 3.5 放物線

放物線  $P: x^2 = 4py$  について

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{4p}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1, & \frac{dy}{dt} &= \frac{t}{2p} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{1}{2p} \end{aligned}$$

したがって、 $\left(t, \frac{t^2}{4p}\right)$  における曲率中心は

$$\left(-\frac{t^3}{4p^2}, 2p + \frac{3t^2}{4p}\right)$$

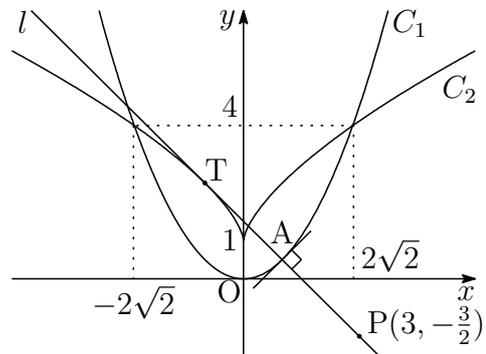
また、 $C$  の縮閉線  $E_p$  は

$$y = 2p + 3\sqrt[3]{\frac{p}{4}x^{\frac{2}{3}}}$$

$E_p$  の  $y$  軸上の尖点の座標は  $(0, 2p)$  であり、 $C$  の焦点  $(0, p)$ 、頂点  $(0, 0)$ 、準線  $x = -p$  との関係も興味深い。 $E_h$  の尖点  $(0, 2p)$  は、 $P$  の頂点  $(0, 0)$  における曲率中心である (複号同順)。

### 3.6 点 $P$ から引ける法線の本数

例えば放物線  $C_1: y = \frac{x^2}{2}$  の法線群の包絡線 (縮閉線) は  $C_2: y = 1 + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$  である<sup>3</sup>。  
 $y$  軸上にない点  $P$  をとると、 $C_2$  の下側にある点  $P$  からは  $C_1$  に 1 本の法線、 $C_2$  上の点  $P$  から  $C_1$  に 2 本の法線、 $C_2$  の上側にある点  $P$  からは  $C_1$  に 3 本の法線が引ける。また、 $y$  軸上の点からは  $C_1$  に 1 本の法線が引ける。 $P(3, -\frac{3}{2})$  から包絡線  $C_2$  に引いた接線  $l: y = -x + \frac{5}{2}$  は第 2 象限の点  $T(-1, \frac{5}{2})$  で接し、 $l$  と  $C_1$  の第 1 象限の交点は  $A(1, \frac{1}{2})$  である。このとき  $C_1$  の点  $A$  における法線が  $l$  である。また、 $C_1$  の  $A$  における接触円 (曲率円) の中心が  $T$  である。



<sup>3</sup>[http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai\\_ri\\_2009.pdf](http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf) の [3] を参照。

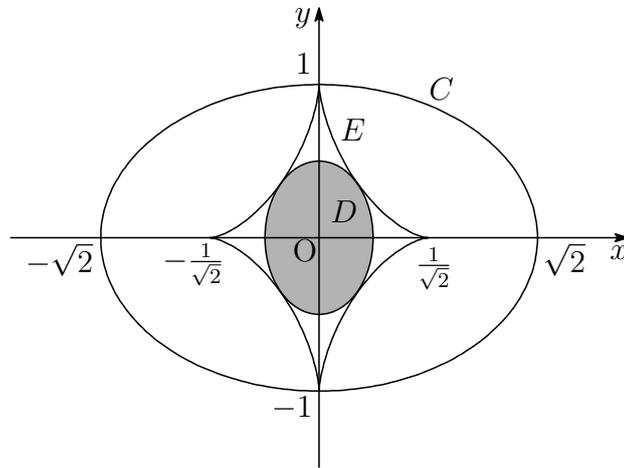
### 3.7 東京大学理系6番

楕円  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  の縮閉線は

$$E: (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

である。  $E$  の  $y$  軸上の尖点が、  $C$  の  $y$  軸上の頂点と一致するように作問されている。

$E$  の内部 (境界を含まない)  $E': (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} < 1$  の点から  $E$  に引ける接線は4本ある。例えば、第1象限にある  $E'$  の点からは、  $E$  に第1象限で接する  $l_1, l'_1$  の2本の接線、第2象限で接する  $l_2$ 、第4象限で接する  $l_4$  がある。  $l_1, l'_1$  と  $C$  の第4象限の交点が、  $C$  のそれぞれの点における法線である。  $l_2$  と  $C$  の第3象限の交点が、  $C$  の点における法線である。  $l_4$  と  $C$  の第1象限の交点が、  $C$  の点における法線である。



本題では、  $D: 2x^2 + y^2 < r^2$  が  $E$  の内部にあること条件であり、  $r$  が最大となるのは、  $D$  の境界線と  $E$  が接するときである。  $C(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$  の曲率中心  $E(x, y)$  は

$$x = \frac{\cos^3\theta}{\sqrt{2}}, \quad y = -\sin^3\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

であり、  $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ 、それぞれ、  $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  で、  $D$  と  $E$  は接し、このとき、  $r$  は最大値  $\frac{1}{2}$  をとる。

## 4 終わりに

楕円  $C$  が円に近づくと、  $C$  に4本の法線が引ける点  $P$  の領域  $E$  は小さくなる。楕円が円になるとき、  $E$  は円の中心に退化し、そこから(中心)は無数の法線が引ける。星形の  $E$  が1点に収束したとき、まるで中心から円に向けて日が射すように、早く新型コロナ(凶星)も終息(収束)し、明るく日本を照らしてもらいたいものである。