2019年大学入試問題研究(数学)

熊本県立総合体育館　会議室
令和元年6月10日(月)

湧心館高等学校
教諭　西村信一

はじめに

平成31年4月14日(日)に代々木ゼミナール福岡校(博多駅前)で九州数学教育会が主催した「第6回算数・数学教育研修(入試問題研究)」にて2019年九州地区主要大学一般前期・後期試験問題(数学)について研究報告を行った．問題および解答を次のサイトに掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

現時点で，次の大学の問題・解答(2019年)を同サイトに掲載している．

前期 東大，東工大，一橋大，名大，京大，阪大，神戸大，広大，九大，九工大，福教大，佐賀大，長崎大，熊本大，大分大，宮崎大，鹿児島大，琉球大
(全学部全学科を掲載)

後期 九大，九工大，福教大，佐賀大，長崎大，熊本大，琉球大
(九州地区国立大の全学部全学科を掲載)

現行課程による入試が実施されて5年目(実質4年目)にあたり，出題内容に関して特徴も表れてきた．特に難関大学を中心に「複素数平面」の出題率が高い．これらの入試問題の中からいくつかを以下に述べる(今後，本webpageを追加予定)．

1　一般前期試験

1.1　東大理系

問題数は6題(150分)．例年出題されていた求積問題がなかったが，$\boxed{1}$ に定積分の問題が出題された．現行課程に本格移行後(2016年),「複素数平面」が毎年出題されている．また,「場合の数と確率」(過去10年のうち7回),「整数の性質」(過去10年のうち8回)は，頻出分野である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の定積分を求めよ．(解答は，上記サイトに掲載)

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

1.2　東大文系

問題数は4題(100分).「微分法と積分法」は過去10年間で毎年出題されている.「図形と方程式」「場合の数と確率」「整数の性質」「数列」に集中し，過去10年間で，それぞれ，7回，4回，6回，6回の出題回数．今年の $\boxed{3}$ は，鏡像原理を利用する問題.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正八角形の頂点を反時計回りにA，B，C，D，E，F，G，Hとする．また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある．点Pが最初に点Aにある．次の操作を10回繰り返す.

操作：コインを投げ，表が出れば点Pを反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点Pを時計回りに隣接する頂点に移動させる.

例えば，点Pが点Hにある状態で，投げたコインの表が出れば点Aに移動させ，裏が出れば点Gに移動させる．以下の事象を考える.

事象 S：操作を10回行った後に点Pが点Aにある.

事象 T：1回目から10回目の操作によって，点Pは少なくとも1回，点Fに移動する.

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ.

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ.

解説 座標平面上の原点Oから右斜め45°，または右斜め $-45°$ の方向に最も近い第1番目の格子点をとり，この2点を線分で結ぶ．同様にして第1番目の格子点から第2番目の格子点をとり，第1番目と第2番目を線分で結ぶ．以下これを有限回繰り返し，こうしてできる線分をつないだものを**折れ線グラフ**ということにする．右図は原点Oと格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例である.

(折れ線グラフ)

n を自然数，k を $|k| \leqq n$ を満たす整数とする．原点Oから格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフが存在するとき ($n+k$ が偶数)，右斜め45°の方向に $\dfrac{n+k}{2}$ 回，右斜め $-45°$ の方向に $\dfrac{n-k}{2}$ 回進む．原点Oから格子点 $(n,\ k)$ を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}$ であるから，格子点 $(n,\ k)$ にある確率は

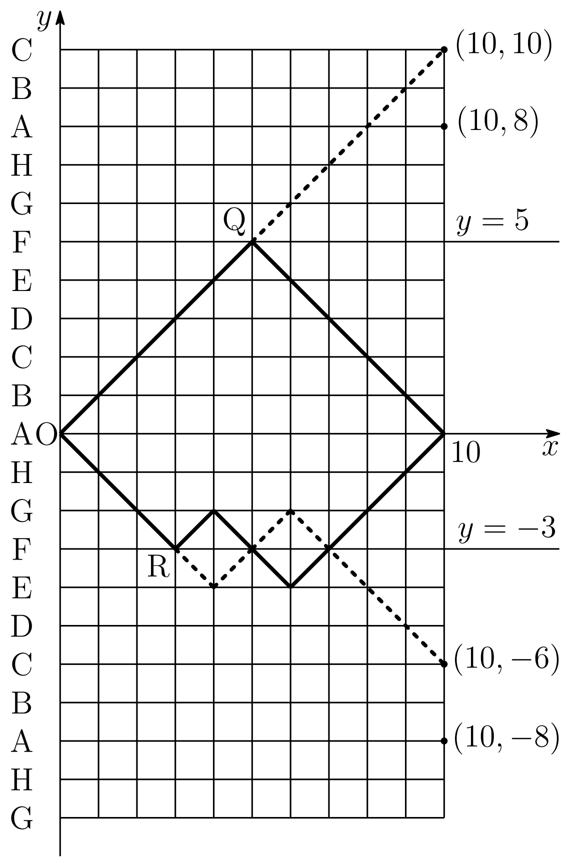
$$P_n(k) = \frac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n}$$

(1) コインの表，裏により，格子点上の点 P がそれぞれ右斜め 45°，右斜め −45° 方向の最も近い格子点に移動するものとする．格子点 $(n,\ k)$ にあるとき，$k \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \pmod 8$ を，それぞれ，A，B，C，D，E，F，G，H に対応させる．操作を 10 回行って点 P が点 A にあるとき，$k = 0, \pm 8$ であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} P_{10}(0) + P_{10}(8) + P_{10}(-8) &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+0}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10+8}{2}}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{\frac{10-8}{2}}}{2^{10}} \\ &= \frac{1}{2^{10}}({}_{10}\mathrm{C}_5 + {}_{10}\mathrm{C}_9 + {}_{10}\mathrm{C}_1) \\ &= \frac{1}{2^{10}}(252 + 10 + 10) = \boldsymbol{\frac{17}{64}} \end{aligned}$$

(2) 原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = 5$ と交わる点を Q とすると，点 Q と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 Q と点 $(10, 10)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい (鏡像原理)．同様に，原点 O と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフで最初に直線 $y = -3$ と交わる点を R とすると，点 R と点 $(10,\ 0)$ を結ぶ折れ線グラフの本数と点 R と点 $(10, -6)$ を結ぶ折れ線グラフの本数は等しい．よって，求める確率は

$$\begin{aligned} &P_{10}(8) + P_{10}(-8) \\ &\qquad + P_{10}(10) + P_{10}(-6) \\ &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_9}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_{10}}{2^{10}} + \frac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{2^{10}} \\ &= \frac{10 + 10 + 1 + 45}{2^{10}} = \boldsymbol{\frac{33}{512}} \end{aligned}$$



1.3　東工大

問題数は5題(180分)．今年は難化．数学IIIの微分法・積分法を中心に毎年出題され，計算量も多い．「場合の数と確率」「整数の性質」は頻出分野である．今年の $\boxed{1}$ は，Weitzenbockの不等式に関する出題． $\boxed{4}$ は，m 次元空間を n 枚の余次元1の超曲面による最大分割数が

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$$

であることに関連する問題である．(1) は $m=2$ の場合を先に求めて，$m=3$ の場合を求めさせる問題．(2) は (1) が1つ退化した場合であり，(3) は (1) が2つ退化した場合である．これらは受験生には馴染みが薄かったと思われる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $H_1, \cdots, H_n$ を空間内の異なる n 枚の平面とする．$H_1, \cdots, H_n$ によって空間が $T(H_1, \cdots, H_n)$ 個の空間領域に分割されるとする．例えば，空間の座標を $(x,\ y,\ z)$ とするとき

- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 8$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $x+y=1$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 7$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $x=1$ を H_2，平面 $y=0$ を H_3 とすると $T(H_1, H_2, H_3) = 6$，
- 平面 $x=0$ を H_1，平面 $y=0$ を H_2，平面 $z=0$ を H_3，平面 $x+y+z=1$ を H_4 とすると $T(H_1, H_2, H_3, H_4) = 15$，

である．

(1) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとり得る値のうち最も大きいものを求めよ．

(2) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとり得る値のうち2番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

(3) 各 n に対して $T(H_1, \cdots, H_n)$ のとり得る値のうち3番目に大きいものを求めよ．ただし $n \geqq 3$ とする．

解答 http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html を参照．

1.4　一橋大

問題数は5題(120分)．文系の受験生にとっては，例年手を付けにくい問題が多かったが，今年は，易化.「整数の性質」は過去10年間において，毎年出題される．今年は，$\boxed{1}$ が「数列」との融合問題．現行課程に移行後,「場合の数と確率」からの出題率が高い(過去5年間で4回).「微分法と積分法も」頻出分野(10年間で8回)．例年，3次関数による求積問題が多く，積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

を利用することがパターン化している($(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ を適用).

1.5　名大理系

問題数は4題(150分)．問題数は少ないが，適切な分量である．少ない出題数の中,「積分法の応用」「整数の性質」「数列」からの出題率が高い(いずれも10年間で7回).

今年度の求積問題において円錐面を断面とする切り口が，楕円・放物線・双曲線であり，楕円の場合は楕円型，すなわち，三角関数を用い，双曲線の場合は，双曲線関数

$$\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})\quad \text{または}\quad \frac{a}{2}(e^t-e^{-t})$$

を用いる．本題では楕円型.

1.6　名大文系

問題数は3題(90分)．文系としては，ややレベルが高いが，どれも問題集などで取り上げられた典型的な問題ばかりである.「図形と方程式」「微分法と積分法」「場合の数と確率」「整数の性質」「数列」からの出題が中心で，それぞれ，10年間で，6回，6回，4回，5回，6回．$\boxed{3}$ は，次の典型的な問題.

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1つのサイコロを3回投げる．1回目に出る目を a，2回目に出る目を b，3回目に出る目を c とする．なお，サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする.

(1) 2次方程式 $x^2-bx+c=0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ.
(2) 2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ のすべての解が整数である確率を求めよ.
(3) 2次方程式 $ax^2-bx+c=0$ が少なくとも1つ整数解をもつ確率を求めよ.

補足 整数を係数とする 2 次方程式 $ax^2 - bx + c = 0$ が有理数を解に持つための必要十分条件は

$$b^2 - 4ac \text{ が平方数}$$

$b = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について，これを満たす ac の値を求めると，$(a,\ b,\ c)$ の組の総数は 20 個のみであるから，それらを確認する方が計算は簡単．

1.7　京大理系

問題数は 6 題 (150 分)．やさしい難問が毎年出題される．問題の切込み方で，計算量が変わってくる．今年は，易化.「積分法の応用」「整数の性質」「数列」の分野からの出題が多く，過去 10 年間で，それぞれ，8 回，7 回，8 回．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．$\cos\theta$ は有理数ではないが，$\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ．ただし，p が素数のとき，$\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい．

考察 「θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ」ということは，θ は有名角で，答えは限られてくる．$0 < 2\theta < \pi$ について，$\cos 2\theta$ が有理数となるとき，2θ は，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2\pi}{3}$ に絞られ，$\cos\theta$ が無理数であれば，θ は $\dfrac{\pi}{6}$ に限ることが分かる．これを示すということから問題に取り組む．問題には，$\cos\theta$，$\cos 2\theta$，$\cos 3\theta$ というように，余弦のみが表れていることに注目し，次の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

の辺々を加えると

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

これに $\alpha = 2\theta$，$\beta = \theta$ を代入すると

$$\cos 3\theta + \cos\theta = 2\cos 2\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \cos 3\theta = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1)$$

上の第 2 式から，$2\cos\theta - 1 \neq 0$，すなわち，$\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ と仮定すると

$$\frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1} = \cos\theta$$

条件から，左辺は有理数で，右辺は無理数となり，矛盾．よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

このように，京大理系の頻出の整数問題などで「満たすものをすべて求めよ」とあるが，実際は限られた場合 (1 つまたは 2 つ) がほとんどで，数学オリンピックなどの問題に似ている．結論を予測し，つまり，出口に向かって解答を進めることも重要である．

1.8 京大文系

問題数は 5 題 (120 分).「微分法と積分法」「場合の数と確率」は過去 10 年間でそれぞれ，10 回，8 回出題．文系であるが，理論的で正確な解答が要求される．例えば，本年度の $\boxed{1}$ (2) では，常用対数表が与えてあり，その表の一番下に「小数第 5 位を四捨五入し，小数第 4 位まで掲載している」とあるので，例えば，

$$\log_{10} 8.94 \fallingdotseq 0.9513 \quad \text{すなわち} \quad 0.95125 \leqq \log_{10} 8.94 < 0.95135$$

として大小を評価することなどが要求される．

$\boxed{\mathbf{1}}$ (2) 8.94^{18} の整数部分は何桁か．また最高位からの 2 桁の数字を求めよ．例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す．(常用対数は省略)

解答 常用対数表から，$0.95125 \leqq \log_{10} 8.94 < 0.95135$ であるから

$$\begin{gathered}
18 \times 0.95125 \leqq 18 \log_{10} 8.94 < 18 \times 0.95135 \\
17.1225 \leqq \log_{10} 8.94^{18} < 17.1243 \\
10^{0.1225} \times 10^{17} \leqq 8.94^{18} < 10^{0.1243} \times 10^{17}
\end{gathered}$$

常用対数表から，$\log_{10} 1.32 < 0.12065$，$0.12705 \leqq \log_{10} 1.34$ であるから

$$1.32 \times 10^{17} < 8.94^{18} < 1.34 \times 10^{17}$$

よって　整数部分の桁数は　**18** 桁，最高位の 2 桁は　**13**

1.9　阪大理系

問題数は 5 題 (150 分)．計算量のある問題が多く，求積問題が過去 10 年間において毎年出題されている.「整数の性質」は難易度，問題の完成度がともに高く，過去 10 年間で 7 回出題されている．今年の $\boxed{4}$ もその典型である．

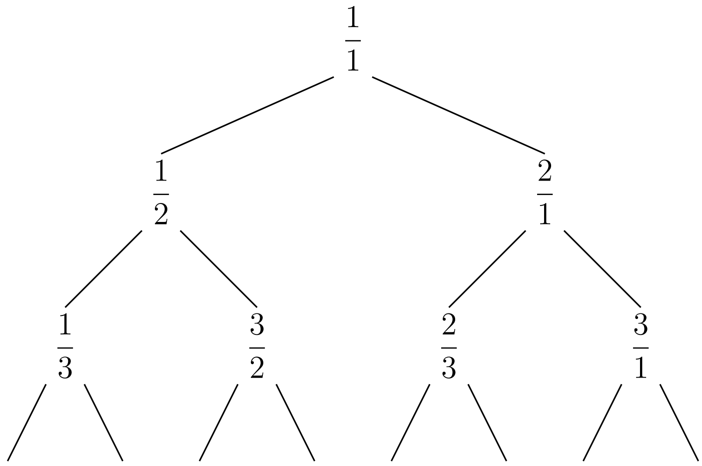
$\boxed{\mathbf{4}}$ 下の図は，$\dfrac{1}{1}$ から始めて分数 $\dfrac{p}{q}$ の左下に分数 $\dfrac{p}{p+q}$，右下に分数 $\dfrac{p+q}{q}$ を配置するという規則でできた樹形図の一部である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) この樹形図に現れる分数はすべて既約分数であることを示せ．ただし整数 $\dfrac{n}{1}$ は既約分数とみなす.

(2) すべての正の有理数がこの樹形図に現れることを示せ.

(3) この樹形図に現れる有理数はすべて異なることを示せ.

(4) $\dfrac{19}{44}$ はこの樹形図の上から何段目の左から何番目に配置されるか答えよ. たとえば，$\dfrac{3}{1}$ は上から 3 段目の左から 4 番目である.



解答 http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html を参照.

1.10　阪大文系

問題数は 3 題 (90 分)．難易が明確であり，各設問ごとに基本から標準レベルの問題が配置されている.「微分法と積分法」は過去 10 年間で 7 回出題されている.

1.11　神戸大理系

問題数は 5 題 (120 分).「微分法」「積分法」「場合の数と確率」「ベクトル」など毎年，典型的な良問が多く，難関大対策としてまず取り組んでおきたい.

1.12　神戸大文系

問題数は 3 題 (80 分)．問題数は少ないが，理系との共通問題が多く，今年も 3 題のうち，2 題が理系との共通問題．文系ではあるが，数学 II・数学 B は理系と同程度のレベルの対応が必要.

1.13　広島大理系

問題数は 5 題 (150 分)．小問も多く，小問ごとの難易が明確で，苦手分野を作らないことが重要．数学 III・A・B を中心に出題されている．

1.14　広島大文系

問題数は 4 題 (120 分)．理系との共通問題も多く，$\boxed{1}$ は理系との共通問題，$\boxed{4}$ はほぼ理系と共通．文系ではあるが，数学 II・数学 B は理系と同程度のレベルの対応が必要.

1.15　九大理系

問題数は 5 題 (150 分)．定番問題の「場合の数と確率」とともに「複素数平面」の分野から現行課程移行後，毎回出題されている．今年は，$\boxed{3}$「場合の数と確率」との融合問題および $\boxed{5}$ の 1 次分数式変換 (メビウス変換) が「複素数平面」の分野から 2 題出題された．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b を複素数，c を純虚数でない複素数とし，i を虚数単位とする。複素数平面において，点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az+b}{cz+1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

(ア) $z=i$ のときに $w=i$ となり，$z=-i$ のときに $w=-i$ となる。

(イ) C は単位円の周に含まれる。

(ウ) 点 -1 は C に属さない。

このとき a，b，c の値を求めよ。さらに C を求め，複素数平面上に図示せよ。

解答 $$C : w = \frac{az+b}{cz+1} \quad \cdots (*)$$

条件 (ア) により $\quad i = \dfrac{ai+b}{ci+1}, \quad -i = \dfrac{a(-i)+b}{c(-i)+1}$

ゆえに $\quad b+c+(a-1)i=0, \quad b+c-(a-1)i=0$

上の 2 式から $\quad a=1, \quad b=-c$

これを $(*)$ に代入すると $\quad w = \dfrac{z-c}{cz+1} \cdots ①$ $\quad$ ゆえに $\quad z = -\dfrac{w+c}{cw-1}$

点 z は虚軸全体を動くから，$z+\overline{z}=0$ より $\quad -\dfrac{w+c}{cw-1} - \dfrac{\overline{w}-\overline{c}}{\overline{c}\,\overline{w}-1} = 0$

整理すると $\quad (c+\overline{c})|w|^2 + (|c|^2-1)(w+\overline{w}) - (c+\overline{c}) = 0 \quad \cdots ②$

条件 (イ) に注意すると，① により $\quad c \neq 0$

さらに，c は純虚数ではないから $\quad c+\overline{c} \neq 0$

$k = \dfrac{|c|^2-1}{c+\overline{c}} \cdots ③$ とおいて (k は実数)，② に適用すると

$$|w|^2 + k(w+\overline{w}) - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad |w+k|^2 = k^2+1$$

条件 (イ) により $\quad k^2+1=1 \quad$ ゆえに $\quad k=0 \quad$ よって $\quad |w|=1 \quad \cdots (**)$

また，③ により $\quad |c|^2-1=0 \quad$ ゆえに $\quad c=\pm 1$

(i) $c=1$ のとき，① により

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2z}{z+1}$$

$z=0$ のとき，$w=-1$ となり，条件 (ウ) に反する．

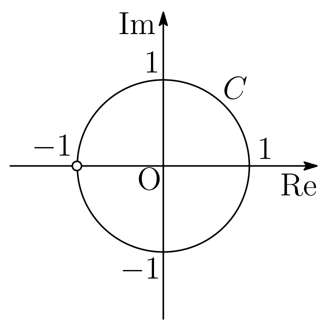
(ii) $c=-1$ のとき，① により

$$w = \frac{z+1}{-z+1} \quad \text{ゆえに} \quad w+1 = \frac{2}{-z+1} \neq 0$$

これは，条件 (ウ) を満たす．

よって $\quad \boldsymbol{a=1, \ b=1, \ c=-1}$

$(**)$ および $w \neq -1$ により，C の概形は右の図のようになる．



補足 $z=i\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$ に代入すると

$$w=\frac{i\tan\theta+1}{-i\tan\theta+1}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos2\theta+i\sin2\theta$$

$-\pi<2\theta<\pi$ より，w は点 -1 を除く原点 O を中心とする単位円周上にある．

解説 一般に，1 次分数式変換 (メビウス変換)

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\quad(a,\ b,\ c,\ d\ \text{は複素数},\ ad-bc\neq0)$$

は，拡縮 (回転)kz，平行移動 $z+\alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成変換である．
特に反転に関して，次の性質がある [1]．

- 原点を通らない円は，原点を通らない円に移る．
- 原点を通る円は，原点を通らない直線に移る．
- 原点を通らない直線は，原点を通る円から原点を除いた図形に移る．
- 原点を通る直線は，原点を通る直線から原点を除いた図形に移る．

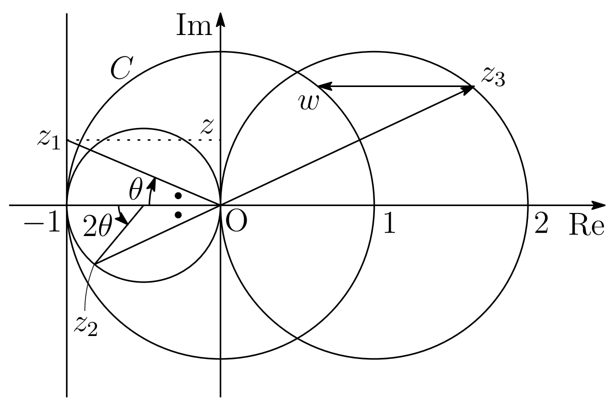
次の変換 (平行移動，反転，拡縮，平行移動)

$$f_1(z)=z-1,\quad f_2(z)=\frac{1}{z},\quad f_3(z)=-2z,\quad f_4(z)=z-1$$

について，合成変換 $f(z)=f_4\circ f_3\circ f_2\circ f_1(z)$ は $\qquad f(z)=\dfrac{z+1}{-z+1}$

$z=i\tan\theta$，$z_1=f_1(z)$，$z_2=f_2(z_1)$，$z_3=f_3(z_2)$，$w=f_4(z_3)$ とすると

$$\begin{aligned}z_2=f_2\circ f_1(z)&=\frac{1}{i\tan\theta-1}=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}\\&=-\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos2\theta+i\sin2\theta)\end{aligned}$$



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$ の解説を参照．

1.16　九大文系

問題数は 4 題 (120 分)．$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ が大問で，難易度的には易から標準．$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ は標準からやや難．$\boxed{4}$ の関数方程式は，理系との共通問題でもあり，$f(x)$，$g(x)$ はともに偶関数であることに気付かなかった受験生が多かったようである．

2 k を実数とする。3 次関数 $y = x^3 - kx^2 + kx + 1$ が極大値と極小値をもち，極大値から極小値を引いた値が $4|k|^3$ になるとする。このとき，k の値を求めよ。

解答 $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 1$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2kx + k$

$f(x)$ は極大値と極小値をもつから，$f'(x) = 0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$\beta - \alpha = \frac{k + \sqrt{k^2 - 3k}}{3} - \frac{k - \sqrt{k^2 - 3k}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{k(k-3)} \quad \cdots ①$$
$$f'(x) = 3(x - \alpha)(x - \beta)$$

極大値，極小値は，それぞれ $f(\alpha)$，$f(\beta)$ であるから

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_\beta^\alpha f'(x)\,dx = 3\int_\beta^\alpha (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

条件により，$f(\alpha) - \beta(\beta) = 4|k|^3$ であるから

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = 4|k|^3 \quad ゆえに \quad \beta - \alpha = 2|k| \quad \cdots ②$$

①，② より　$2|k| = \dfrac{2}{3}\sqrt{k(k-3)}$　ゆえに　$k(8k+3) = 0$

$k(k-3) > 0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{k = -\dfrac{3}{8}}$

4 0 でない 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7$$
$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

解答　(1) 2 つの整式 $f(x)$，$g(x)$ が満たす恒等式

$$(*)\left\{\begin{array}{l} f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7 \\ g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2 \end{array}\right.$$

により，$f(x)$，$g(x)$ の次数をそれぞれ m，n とすると

$$\left\{\begin{array}{ll} 2m=2+n & \cdots① \\ 3n=\max(4+m,\ 2+n) & \cdots② \end{array}\right.$$

(i) $4+m \geqq 2+n$ のとき，② より　$3n=4+m$　ゆえに　$m=3n-4$
これと ① を条件に注意して解くと　$m=n=2$

(ii) $4+m<2+n$ のとき，② より　$3n=2+n$　ゆえに　$n=1$
これを ① に代入すると，$m=\dfrac{3}{2}$ となり，不適．

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2 であるから，題意は成立する．

(2) $(*)$ の第 1 式において，x を $-x$ に置き換えることにより

$$f(x^2)=(x^2+2)g(-x)+7$$

これと $(*)$ の第 1 式により　$g(-x)=g(x)$　$\cdots$③

また，$(*)$ の第 2 式の x を $-x$ に置き換えると

$$g(-x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(-x)-6x^2-2$$

③ より，$g(x)$ は偶関数であるから

$$g(x^3)=x^4f(-x)-3x^2g(x)-6x^2-2$$

これと $(*)$ の第 2 式より　$f(-x)=f(x)$

また，$(*)$ に $x=0$ を代入すると

$$f(0)=2g(0)+7,\quad g(0)=-2 \quad \text{ゆえに} \quad f(0)=3$$

以上の結果から，$f(x)=ax^2+3$，$g(x)=px^2-2$ とおくと，$(*)$ は

$$\left\{\begin{array}{l} ax^4+3=(x^2+2)(px^2-2)+7 \\ px^6-2=x^4(ax^2+3)-3x^2(px^2-2)-6x^2-2 \end{array}\right.$$

整理すると　$\left\{\begin{array}{l} ax^4=px^4+2(p-1)x^2 \\ px^6=ax^6-3(p-1)x^4 \end{array}\right.$

上の 2 式の両辺の同じ次数の項の係数を比較すると

$$a=p,\quad p-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=p=1$$

よって　$\boldsymbol{f(x)=x^2+3,\ \ g(x)=x^2-2}$

2　熊本大学　一般前期試験

今年の一般前期試験は，文系・理系・医学部医学科の難易差が小さくなっている．理系レベルの問題を中心に文系は理系と 2 題が共通，医学部医学科も理系と 2 題が共通であった．また文系と医学部医学科の共通問題も 1 題あった．2009 年から医学部医学科の数学は独自問題となったが，本年度の独自問題は 1 題のみであった．

- 文系　$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・A・B (120 分)
- 理系　$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 医医　$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して $a_n \neq 2$ を示せ。

(2) $b_n = \dfrac{3}{a_n - 2} + 1$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) $a_n > \dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1 個のさいころを投げて，出た目の数を a とする。a が偶数のときは $b = \dfrac{1}{2}a$，a が奇数のときは $b = \dfrac{1}{2}(a + 3)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a > b$ となる確率を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\pi}{5} > 0.5$ および $\cos\dfrac{\pi}{5} < 0.9$ を示せ。

(3) $S = \cos\dfrac{\pi}{a} + \sin\dfrac{\pi}{b}$ とおく，$a > b$ であるとき，$S < 1.7$ となる条件付き確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a，b に対して，$f(x) = x^2 + ax + b$ とおく。$y = f(x)$ は x 軸および直線 $y = 2x + 3$ に接しているとする。実数 a，b を求めよ。このとき，$y = f(x)$，x 軸および直線 $y = 2x + 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 座標平面上の曲線 $C_1 : y = x^2 + 2px - 2p$ および $C_2 : y = x^3$ の共有点がちょうど 2 個になるような実数 p の値をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ 座標平面上の直線 ℓ を $y=ax-a-2$，直線 m を $y=bx+3b$ とおく。直線 ℓ と直線 m は互いに直交しながら座標平面上を動くとする。ただし，a，b は ℓ と m の条件を保ちながら実数値をとって変化するものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ と直線 m の交点 P の軌跡を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,-2)$，点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，線分 AP および線分 BP の長さを a を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{APB}$ の面積が最大となるときの a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標平面上の曲線 $C_1: y=x^2+2ax-2a+1$ および $C_2: y=x^3+1$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点がちょうど 2 個になるような実数 a の値を求めよ。ただし，$a\neq 0$ とする。

(2) (1) で求めた a に対し，曲線 C_1 と曲線 C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標平面上の曲線 $y=x\sin 3x+3x^2\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を C とする。曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とし，その接点の x 座標を a とする。ただし，$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{\mathbf{7}}$ 赤球と白球の 2 色の球を用いて行うゲームがあり，手元にある球全体に対する赤球の比率が p であるとき，確率 p^2 でゲームに勝つものとする。n を 2 以上の整数とし，赤球，白球ともに n 個入っている箱から n 個の球を取り出してゲームを行った。以下の問いに答えよ。

(1) k を 0 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となる確率は $\dfrac{({}_n\mathrm{C}_k)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ となることを示せ。

(2) k を 1 以上 n 以下の整数とする。取り出した n 個の球のうち赤球が k 個となり，さらにゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}\cdot\dfrac{({}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1})^2}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$ であることを示せ。

(3) ゲームに勝つ確率は $\dfrac{n}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

解答 http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html を参照.

2.1 熊大文系　出題分野 (2010-2019)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式			1							
	2 次関数										
	図形と計量		1					1			
	データの分析							2			
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式										4
	三角関数									2	
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法	1·2	3	3·4	2	2·3·4	1·4	4	4	1	3
A	場合の数と確率	3*						2	2	3	2
	整数の性質		2		1			3			
	図形の性質										
B	平面上のベクトル	4									
	空間のベクトル		4		3	1	2		1		
	数列			2	4		3	3	3	4	1
	確率分布と統計										

数字は問題番号 ($*$ は旧課程の内容を含む)

2.2 熊大理系　出題分野 (2010-2019)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	数と式			1							
I	2 次関数										
	図形と計量										
	データの分析										
	式と証明										
	複素数と方程式										
II	図形と方程式										
	三角関数	1									
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法						1				
	式と曲線		4								
	複素数平面							3	2		
	関数										
III	極限					3	4				
	微分法とその応用			3	3	2		4	3		
	積分法	3·4	3	4	3		4			3·4	
	積分法の応用				4	4		4	3		3·4
	場合の数と確率		1								2
A	整数の性質							2			
	図形の性質										
	平面上のベクトル	2	2								
B	空間のベクトル				2	1	2	1	1	1	
	数列				1		3·4	2	4	2	1
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)			2			数字は問題番号				

2.3 熊大医医　出題分野 (2010-2019)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
I	数と式										
	2 次関数										
	図形と計量						1				
	データの分析										
II	式と証明										
	複素数と方程式										
	図形と方程式				4						2
	三角関数								1		
	指数関数と対数関数										
	微分法と積分法		4								
III	式と曲線		3								
	複素数平面							3	2	3	
	関数										
	極限	4					4		4		
	微分法とその応用					2·3	1	2·4	3		
	積分法	3·4		3	3		4	4		4	
	積分法の応用					4		2	3		1·3
A	場合の数と確率	2		1	1					2	4
	整数の性質		1								
	図形の性質										
B	平面上のベクトル							1			
	空間のベクトル	1	2	4	2	1	2			1	
	数列	3					3·4				
	確率分布と統計										
C	行列 (旧課程)			2			数字は問題番号				