第6回算数・数学教育研修会

入試問題研究　複素数平面

代々木ゼミナール福岡校
平成30年4月15日

湧心館高等学校
教諭　西村信一

1　はじめに

現行課程での入試が実施されて4年目 (実質3年目) にあたり，出題内容に関して特徴も表れてきた．旧課程において，対称移動・回転・拡大 (縮小) などの概念について主に行列で扱われたものが複素数平面でのみの取り扱いとなったため，難関大学を中心に次の内容について核心的な理解が要求されるようになった．

- 特に2次曲線の極方程式との関連問題

$$r = \frac{\lambda}{1 - e\cos\theta} \tag{1}$$

これを複素数平面で扱うとき，$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ となる．

- 1次分数式変換 (メビウス変換) に関する出題

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{2}$$

1次分数式変換は，拡大 (回転)kz，平行移動 $z+\alpha$，反転 $\dfrac{1}{z}$ の合成関数で表され，特に反転に関する出題が目立つ．

2次曲線の極方程式 (1) の極が2次曲線の焦点であることを理解していない受験生もいる．また，形式的な式変形にだけを覚えていて，反転による図形の振る舞いを理解していない受験生も少なくない．数学が得意な生徒でも，z が円周上にあるとき，(2) の $f(z)$ も常に円周上にあると思い込んでいるようである．

以上の点について，次の出題例を元に問題を探求する．

2　出題例

東大理科 2017 年前期

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

解答　(1) 点 $\alpha \neq 0$ と O を結ぶ線分の垂直二等分線 L の方程式は　$|z| = |z - \alpha|$

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ であるから

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right| \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$$

したがって　$\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$　よって，w は中心 $\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$，半径 $\dfrac{\boldsymbol{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ の円

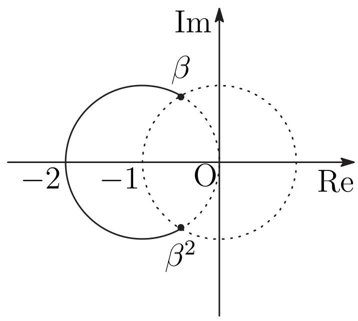
(2) $\beta = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2}$ であるから，2 点 β，β^2 を結ぶ線は，点 -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分であるから，(1) の結果から

$$|w + 1| = 1 \quad \cdots ①$$

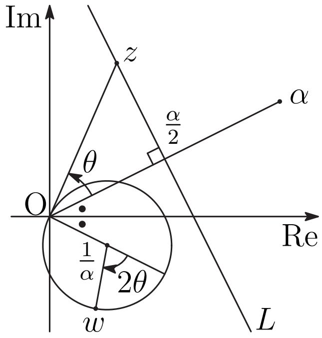
z は原点を中心とする半径 1 の円の内部および周上の点であるから

$$|z| \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad |w| \geqq 1 \quad \cdots ②$$

したがって，点 w の軌跡は，①，② の共通部分で右の図の実線部分．



解説 L 上の点 z は



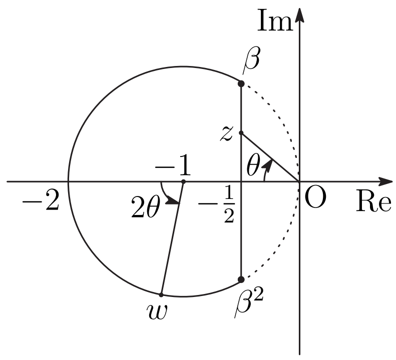
$$z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= \frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+i\tan\theta} = \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\alpha}(2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta) \\ &= \frac{1}{\alpha}(1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

点 w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．$-\pi < 2\theta < \pi$ であるから，点 w の表す軌跡はこの円から原点 O を除いたものになる．

また，点 β と β^2 を結ぶ線分上の点 z は



$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

$w = \dfrac{1}{z}$ により

$$\begin{aligned} w &= -\frac{2}{1-i\tan\theta} = -\frac{2\cos\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} \\ &= -2(\cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta) \\ &= -1-(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \end{aligned}$$

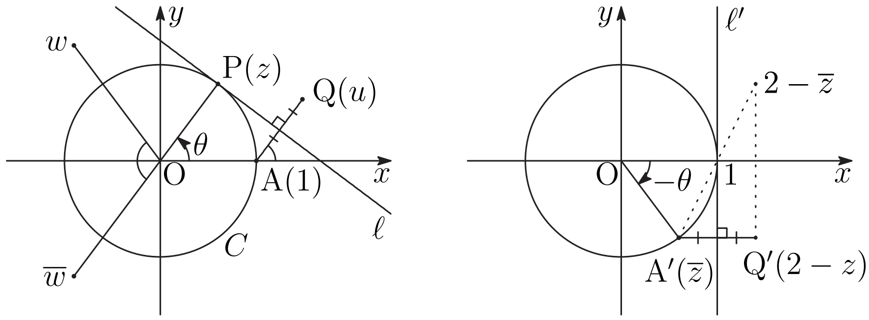
東大理科 2018 年前期

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする．$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ．

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする．点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ．

解答 (1) $\theta=\arg z$ とし，2 点 A，Q をそれぞれ原点 O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ A′，Q′ とすると，$\mathrm{A}'(\overline{z})$ を点 1 に関して対称位移動した点が $2-\overline{z}$ で，この点を x 軸に関して対称移動した点が $\mathrm{Q}'(2-z)$ である．



$\mathrm{Q}(u)$ は $\mathrm{Q}'(2-z)$ を原点 O を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$u=z(2-z)\quad \text{ゆえに}\quad w=\frac{1}{1-u}=\frac{1}{1-z(2-z)}=\frac{1}{(z-1)^2}$$

さらに $\overline{w}=\dfrac{1}{(\overline{z}-1)^2}=\dfrac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2}=\dfrac{z^2}{(1-z)^2}=z^2w$ 　よって $\boldsymbol{\dfrac{\overline{w}}{w}=z^2}$

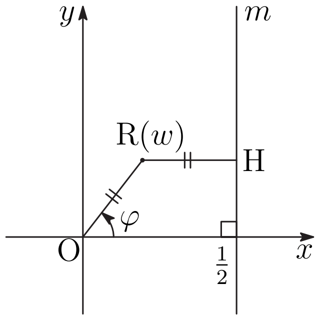
したがって

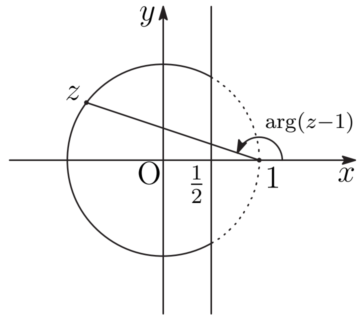
$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=\left|1+\frac{\overline{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|=\left|1+z^2-(z-1)^2\right|=2|z|=\mathbf{2}$$

(2) (1) の結果より　$\arg w = -2\arg(z-1)$，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2} - \dfrac{1}{2}\right| = |w|$　$\cdots(*)$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{8}{3}\pi \leqq -2\arg(z-1) \leqq -\dfrac{4}{3}\pi$

$\varphi = \arg w$ とおくと　$-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi$





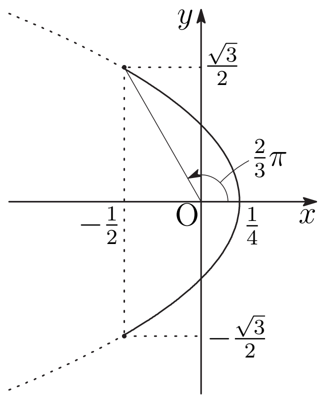
複素数平面上に $\mathrm{R}(w)$ をとり，点 $\dfrac{1}{2}$ を通り，x 軸に垂直な直線 m に R から垂線 RH を引く．$r = |w|$ とすると，$(*)$ より

$$\mathrm{RH} = \left|\frac{w+\overline{w}}{2} - \frac{1}{2}\right| = r$$

$\mathrm{OR}\cos\varphi + \mathrm{RH} = \dfrac{1}{2}$ であるから　$r\cos\varphi + r = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

よって　　$r = \dfrac{1}{2(1+\cos\varphi)}$　$\left(-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\cdots(**)$

$w = x + yi$ とおくと，$x = r\cos\varphi$，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから，① より



$$x + r = \frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad r^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

整理すると　　$x = \dfrac{1}{4} - y^2$

$(**)$ より　$\varphi = \pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$r = 1$

$\varphi = -\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4} - y^2}$　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\mathrm{R}(w)$ の表す軌跡は，右上の図のようになる．

補足 $(**)$ および $\varphi = \arg w$ より，w は次式で与えられる．

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

別解 $\theta = \arg z$ とすると，条件から $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

$w = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ により

$$w = \frac{1}{z^2-2z+1} = \frac{\overline{z}}{z+\overline{z}-2} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos\theta - 2} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

ここで，$\theta = \pi - \varphi$ とおくと

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$r = |w|$ とおくと，$(**)$ が得られる (以下の計算は同様).

3　終わりに

数学 III の教科書の単元の配置は次のとおりである．

	第 1 章	第 2 章
第一学習社 (新編数学 III)	複素数平面	式と曲線
数研出版 (新編数学 III)	複素数平面	式と曲線
東京書籍 (新編数学 III)	式と曲線	複素数平面
啓林館 (新編数学 III)	式と曲線	複素数平面

出題例からも分かるように,「複素数平面」からの出題であっても，内容としては「式と曲線」で扱う 2 次曲線や極方程式の知識が要求される．したがって，履修させる順序としては,「式と曲線」を先に学習し，その後に「複素数平面」について学習する方が望ましいと思われる．

複素数平面を先に学習する場合であっても，複素数平面の学習を深める前に，式と曲線の内容について学習する必要があるようだ.