

第 6 回算数・数学教育研修会

入試問題研究 九大 / 熊大

代々木ゼミナール福岡校

平成 29 年 4 月 16 日

玉名工業高等学校

教諭 西村 信一

1 はじめに

九州大学および熊本大学における一般前期・後期試験(数学)について過去 12 年に亘る出題分野と出題傾向について分析結果を一覧にした。

また, 2017 年度一般前期・後期試験(数学)で出題された問題とその解答を次のサイトに掲載しており, これらの問題分析について報告するものである。

- 九州大学(一般前期) 問題・解答
 - 文系 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2017.pdf
 - 理系 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2017.pdf
- 九州大学(一般後期) 問題・解答
 - 数学科 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2017_kouki.pdf
 - 工学部 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf
- 熊本大学(一般前期) 問題・解答
 - 文系 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_bun_2017.pdf
 - 理系 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2017.pdf
 - 医学科 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2017.pdf
- 熊本大学(一般後期) 問題・解答
 - 理学部 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_2017_kouki_rigakubu.pdf

九州地区国立大学(九大・九工大・福教大・佐大・長大・熊大・分大・宮大・鹿大・琉大)全学部全学科の過去 16 年分(2001-2016)の一般前期試験問題(数学)を次のサイトに掲載しています(九大・熊大は過去 20 年分(1997-2016))。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html>

当サイトは, 2014 年九州算数・数学教育研究(熊本)大会での研究報告の一環として作成したものです。掲載されている内容等についてお気付きの点がございましたら, ご連絡 [nisi0072@yahoo.co.jp] いただければありがたいです。

2 九州大学

2.1 九州大学 出題分野

2015年度入試は、新課程での初年度の入学試験であったため、旧課程履修者への配慮からデータの分析(数学I)、整数の性質(数学A)、複素数平面(数学III)の分野からの出題はなかったが、2016・2017年度入試を通じて出題分野に傾向が現われてきたようである。

2.1.1 九州大学 文系(一般前期) 出題分野

毎年、「場合の数と確率」「微分法と積分法」の分野からの出題率が高く、近年、「整数の性質」からの出題が定着している。4題中3題の出題分野が固定化されつつあり、文系受験者はこれらを重点分野として学習しておく必要がある。

前期	九州大学 文系	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学I	数と式		1										2
	2次関数												
	図形と計量		4		1	1				3			
	データの分析												
数学A	場合の数と確率		3		3	2	4	4	3	4*	3	3	3
	整数の性質							3		2	4	4	4
	図形の性質									3		2	
数学II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式								2,4	1			2
	三角関数	4		1	1	3				3			
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法	1		2,4	4	3	1	2	4	1	1	1	1
数学B	平面上のベクトル			3	2		3						
	空間のベクトル	3	2					1	1		2		
	数列	2		4		4	2	4					
	確率分布と統計												

数字は問題番号(*は旧課程の内容を含む)

2.1.2 九州大学 理系 (一般前期) 出題分野

「確率」および「微積」(数学 III) は必題であるが、現行課程で導入された「整数の性質」および「複素数平面」の分野から、2016・2017 年度入試で出題されたことに注意したい。

前期	九州大学 理系	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学 I	数と式												
	2 次関数							3					
	図形と計量					1							
	データの分析												
数学 A	場合の数と確率		4	2	2	2	5	5	3	4*	4	3	4
	整数の性質									2		4	3
	図形の性質											2	
数学 II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式									3			
	三角関数	4	5	5									
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法										1		
数学 B	平面上のベクトル	2		3	1								
	空間のベクトル		3				4		2				2
	数列	3					3	5				3	3
	確率分布と統計												
数学 III	式と曲線									3			
	複素数平面											5	5
	関数	5		1							1		
	極限	1		1		3		3,4	1			1	
	微分法とその応用	1	1	4	3	3	2			1			1
	積分法	4									2		
	積分法の応用		1	4	3,5	4	1	1	1,4	1	3	1	1
旧課程	行列 (数学 C)		2		4	5		2	5				

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

2.1.3 九州大学 理学部数学科 (一般後期) 出題分野

2016・2017年度入試では、現行課程で導入された「複素数平面」の分野からの出題があったことに注意したい。数学 III の微積は必題であるが、「場合の数と確率」からの出題率の高さに特徴がある。

後期	九州大学 数学科	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学 I	数と式												
	2次関数												
	図形と計量												
	データの分析												
数学 A	場合の数と確率	3*		4	4			2	4	3*	4	3	4
	整数の性質										2	4	
	図形の性質												
数学 II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式												
	三角関数												
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法											1	
数学 B	平面上のベクトル		3	3					2				1
	空間のベクトル	2											
	数列				2								
	確率分布と統計												
数学 III	式と曲線												
	複素数平面											2	2
	関数						4	4					
	極限		1	4	2		2	3		2	4		
	微分法とその応用		4	1	3	3	1	3,4	1				3
	積分法		1	1,2	3			3			4		
	積分法の応用	4	4			1	3		1	1	3	1	
旧課程	行列 (数学 C)	1	2		1	2		1	3	4			

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

2.1.4 九州大学 工学部 (一般後期) 出題分野

「微積 (数学 III)」「場合の数と確率」からの出題は定着している。「空間ベクトル」の分野からの出題も目立つ。現行課程で導入された「複素数平面」については今年度は出題されなかったが、旧課程で定着していた行列に代わる分野として注意が必要である。後期試験は、理学部数学科が4題 (150分) に対し、工学部は5題 (120分) で時間も短い。さらに、前期試験5題 (150分) よりも難易度が高く完答は困難である。

後期	九州大学 工学部	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学 I	数と式												
	2次関数												
	図形と計量		5										
	データの分析												
数学 A	場合の数と確率	2	4	2	4	4	5*	3	2	2	2	2	2
	整数の性質												
	図形の性質												
数学 II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式			1									
	三角関数												
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法	1											
数学 B	平面上のベクトル					2							
	空間のベクトル		1		3			2	1		1	3	3
	数列	3					1		4				5
	確率分布と統計												
数学 III	式と曲線			4			3						
	複素数平面											1	
	関数	4									3		
	極限	3	3		1,5	2,5	1	4	4,5	5	4	2,4	1
	微分法とその応用		3	5	1,5		4		5	3,4,5			1,4
	積分法		3	5	1,5	5		1,4		3			
	積分法の応用					1	4			4	5	5	
旧課程	行列 (数学 C)	5	2	3	2	3	2	5	3	1			

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

2.2 九州大学 問題分析 (2017)

2.2.1 九州大学 文系 (一般前期) 問題分析 (2017)

今年度も4題中, 3題は「微分法と積分法」「場合の数と確率」「整数の性質」からの出題であった. 4問とも基本的に忠実な出題で, 受験者の平均点も高くなったのではないだろうか.

1 (微分法と積分法)

放物線 $C_1: y = 2x^2 + 1$, $C_2: y = -x^2 + a$ の相似比は $1:2$ である. 一般に,
 $C_1: y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $C_2: y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ の相似比は $\frac{1}{|a_1|} : \frac{1}{|a_2|}$

- (1) C_1 の頂点 $(0, 1)$ と C_2 の頂点 $(0, a)$ を $1:2$ に内分する点 $\left(0, \frac{2+a}{3}\right)$ が求める2直線の交点であり, C_1, C_2 の相似の中心である. この中心を A , C_1 上の点に $P(t, 2t^2 + 1)$ をとり, $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AP} \dots (*)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= -2\overrightarrow{OP} + 3\overrightarrow{OA} \\ &= -2(t, 2t^2 + 1) + 3\left(0, \frac{2+a}{3}\right) \\ &= (-2t, -4t^2 + a) = (-2t, -(-2t)^2 + a)\end{aligned}$$

これから, Q は C_2 上の点であることが分かる.

求める直線を $l: y = mx + \frac{2+a}{3}$ とおき, これと C_1 の方程式から y を消去し, 整理すると

$$2x^2 - mx + \frac{1-a}{3} = 0$$

l と C_1 は接するから, 上の方程式の係数について

$$(-m)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1-a}{3} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m = \pm 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-a)}$$

- (2) (*) より, S_1, S_2 の相似比が $1:2$ であるから, S_1, S_2 の面積比は $1:2^2$.

よって, 2つの図形の面積比から $\frac{S_2}{S_1} = 4$

2 (数と方程式, 図形と方程式)

小問ごとに独立していて, (1) が解けないと (2) はできないという形式ではない. ただ, (2) は (3) を解くためのヒントを提供している.

- (1) $\triangle OAB$ が正三角形であるから, $OA^2 = OB^2 = AB^2$ を利用する.
- (2) 教科書の例題などで扱われている「 $\sqrt{2}$ が無理数」であること証明した手順を覚えていけばよい. 文系数学では, どの教科書でも扱われている重要例題が出題されることがある. 2010 年には, $1 + 2 + \dots + n$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ を n の多項式で表す証明問題などが出題されたことがある.
- (3) 座標平面の三角形の頂点の座標座標が与えられた三角形の面積公式を覚えておきたい. また, 正三角形の面積で $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ が出てくることと (2) との関連に気付く必要がある.

$\overrightarrow{OA} = (1, a)$, $\overrightarrow{OB} = (s, t)$ であるから, $\triangle OAB$ の面積により

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \sin 60^\circ = \frac{1}{2} |t - as|$$

このとき, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ であることに注意して

$$\frac{1}{2}(a^2 + 1) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} |t - as| \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3} = \frac{2|t - as|}{a^2 + 1} \quad \dots (*)$$

a が有理数であるとき, 2 数 s, t がともに有理数であるとする, (*) の右辺は有理数となり, (2) の結果に矛盾する.

3 (確率)

昨年 of 確率の問題が非常に難しく (完答できた受験生はいない), その反動もあって例年よりも易しくなっている. 確率の問題であるが, (3) の計算では数列の和の計算が必要となる.

- (1) n 回以下では勝敗が決まらないのは, n 回とも 1 または 2 の目が出ることであるから, 求める確率 p_n は

$$p_n = \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

$p_n < 0.005$ のとき $\frac{1}{3^n} < 0.005 = \frac{1}{200}$ ゆえに $3^n > 200$

$3^4 = 81, 3^5 = 243$ であるから, 求める最小の n は $n = 5$

($\log_{10} 2 = 0.301, \log_{10} 3 = 0.477$ まで使用しなくともよい)

- (2) さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つのは, 1 回目または 3 回目で A が勝つことであるから, 求める確率は

$$\frac{2}{3} + p_2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{27}$$

- (3) 求める確率は, (2) と同様に

$$\frac{2}{3} + \sum_{i=1}^k p_{2i} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^k \frac{1}{3^{2i}} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{9^{k+1}}\right)$$

4 (性質の性質)

この分野の出題としては, 今年は基本的な出題となっている.

- (1) ユークリッドの互除法を用いる基本題.
(2) 2017 を 15 で割った商は 134. 134 以下の自然数で, 3, 5 と互いに素である個数.
(3) $225 = 3^2 \times 5^2, 15 = 3 \times 5, 1998 = 2 \times 3^3 \times 37, 111 = 3 \times 37$
求める数は 2017 以下で, $3 \times 5 \times 37$ の倍数であるから

$$\{555n \mid n = 1, 2, 3\}$$

ただし, n は 2, 3, 5 と互いに素であるから, 求める数は 555

2.2.2 九州大学 理系 (一般前期) 問題分析 (2017)

5 題中, 2 題は「場合の数と確率」「微積 (数学 III)」が定着しており, 現行課程で導入された「整数の性質」および「複素数平面」の分野から, 2016・2017 年度入試で出題された. 難易度については, 例年と同程度であったが, [3] (3) の根拠を示すのに苦慮した受験生が多かったと思われる. 確率については, 2 年連続でマルコフ連鎖に関する出題であり, 九大入試の特徴でもある.

[1] (微分法と積分法)

積分自体は難しくないが, a と p の計算処理がポイントになる.

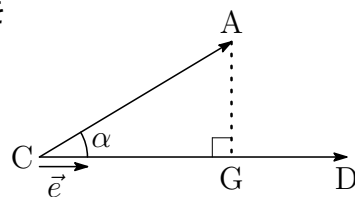
- (1) 基本題.
- (2) a , $\cos 2p$ の値を求めないと, (3) を解くことができない.
- (3) 積分自体は難しくないが, $\cos 2p$, $\cos^2 p$ の値を積分値に適用するとき
に注意が必要.

[2] (空間のベクトル)

\overrightarrow{CG} , \overrightarrow{CH} を求める計算法を知っておきたい.

- (1) \overrightarrow{CA} と \overrightarrow{CD} のなす角を α とし, 単位ベクトル \vec{e} を

$$\vec{e} = \frac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|} \quad \dots \textcircled{1}$$



とすると, A から CD に下ろした垂線と CD の交点 G について

$$\overrightarrow{CG} = (|\overrightarrow{CA}| \cos \alpha) \vec{e} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{また, } \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CD}|} \text{ であるから } |\overrightarrow{CA}| \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}$$

$$\text{これと } \textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると } \overrightarrow{CG} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|^2} \overrightarrow{CD}$$

- (2) (1) と同様にして, \overrightarrow{CH} を求める.
 $\vec{u} = (a^2 + b^2) \overrightarrow{AG}$, $\vec{v} = (a^2 + b^2) \overrightarrow{BH}$ とおくと, \vec{u} と \vec{v} のなす角は θ .

[3] (数列, 整数の性質)

合同式を利用することで計算を簡潔に行える.

- (1) $a_n = 4n - 3 \dots \textcircled{1}$ であるから, $4n - 3 \equiv 0 \pmod{7}$ のとき

$$n \equiv -1 \pmod{7} \quad \text{ゆえに } n = 7m - 1 \dots \textcircled{2} \quad (m \text{ は整数})$$

$$1 \leq 7m - 1 \leq 600 \text{ であるから, } 1 \leq m \leq 85 \text{ より, } 85 \text{ 個}$$

- (2) ②を①に代入すると $a_n = 4(7m - 1) - 3 = 7(4m - 1)$
 a_n が 7^2 の倍数であるとき, $4m - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$m \equiv 2 \pmod{7} \quad \text{ゆえに} \quad m = 7l + 2 \quad (l \text{ は整数})$$

これを②に代入すると $n = 7(7l + 2) - 1 = 49l + 13 \quad \dots \textcircled{3}$
 $1 \leq 49l + 13 \leq 600$ であるから, $0 \leq l \leq 11$ より, 12個

- (3) ③を①に代入すると $a_n = 4(49l + 13) - 3 = 7^2(4l + 1)$
 a_n が 7^3 の倍数であるとき, $4l + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ であるから

$$l \equiv -2 \pmod{7} \quad \text{ゆえに} \quad l = 7k - 2 \quad (k \text{ は整数})$$

これを③に代入すると $n = 49(7k - 2) + 13 = 343k - 85 \quad \dots \textcircled{4}$
 $1 \leq 343k - 85 \leq 600$ を満たす整数 k は 1 で, このとき $n = 258$

④を①に代入すると $a_n = 4(343k - 85) - 3 = 7^3(4k - 1)$
 これから, a_n が 7^4 の倍数となることはない.

以上の結果および②, ③より, $1 \leq n \leq 600$ に対して

$$\begin{aligned} a_n \text{ が } 7 \text{ の倍数であるとき} & \quad n \equiv -1 \pmod{7} \\ a_n \text{ が } 7^2 \text{ の倍数であるとき} & \quad n \equiv 13 \pmod{49} \\ a_n \text{ が } 7^3 \text{ の倍数であるとき} & \quad n = 258 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ のうち, 7 の倍数の項を次のように並べると

a_6	a_{13}	a_{20}	a_{27}	a_{34}	a_{41}	a_{48}
a_{55}	a_{62}	a_{69}	a_{76}	a_{83}	a_{90}	a_{97}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{202}	a_{209}	a_{216}	a_{223}	a_{230}	a_{237}	a_{244}
a_{251}	a_{258}	a_{265}				

上の表で 2 列目のみ 7^2 を因数にもち, それ以外の列は 7 を因数にもつ.
 ただし, 第 6 行目第 2 列の a_{258} のみ 7^3 を因数にもつ.

したがって, 2 列目以外の 32 項 (7 を因数にもつ), 2 列目の第 1 行から第 5 行目までの 5 項 (7^2 を因数にもつ) および第 6 行目第 2 列の a_{258} より

$$32 \times 1 + 2 \times 5 + 3 = 45$$

よって, 求める n の最小値は $n = 265$

4 (確率)

$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ が a_n, b_n, c_n によって定まる (1 つ前の時点だけを考慮する) .
 このような確率過程をマルコフ連鎖 (Markov chain) という .

近年では, 2016, 2012 年にも出題されている . 2012 年は理系文系の共通問題として出題され, 理系は行列 (旧課程) を使って解説しているので, 文系の数列を使った解説を参考にしてもらいたい .

(1) (2) (3) 定められたルールにより, 次の確率漸化式が得られる .

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + b_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{4}(b_n + c_n)$$

$d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, \dots$) とすると

$$d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 1 + 0 + 0 = 1$$

(*) の辺々を加えることにより

$$d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \quad \text{ゆえに} \quad d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \dots \textcircled{1}$$

したがって, (*) は

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - b_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - c_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - a_n \right) = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4}a_n \end{aligned}$$

上の 3 式から, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4}c_{n-1} \right) = \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4}a_{n-2} \right) = \frac{3}{2^{n+3}} - \frac{1}{64}a_{n-2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② に $n = 3, 6$ を代入することにより

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{3}{2^6} - \frac{1}{64}a_1 = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} \cdot 1 = \frac{1}{32} \\ a_7 &= \frac{3}{2^9} - \frac{1}{64}a_4 = \frac{3}{512} - \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{32} = \frac{11}{2048} \end{aligned}$$

よって A が 4 回目に勝つ確率は $a_4 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$

A が 7 回目に勝つ確率は $a_7 \times \frac{2}{4} = \frac{11}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{4096}$

5 (複素数平面)

現行課程から出題されるようになった複素数平面は、連続して出題されており、今後、対応が必要となってくる分野である。

$$(1) \quad \alpha = 10000 + 10000i = 10000\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$w = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{ゆえに } z_n = \alpha w^n = \frac{10000\sqrt{2}}{2^n} \left\{ \cos \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi + i \sin \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi \right\}$$

$$\text{よって } |z_n| = \frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}}, \quad \arg z_n = \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi$$

(2) (1)の結果から、 $|z_n| \leq 1$ のとき

$$\frac{10000}{2^{n-\frac{1}{2}}} \leq 1 \quad \text{ゆえに } 2^{n-\frac{1}{2}} \geq 10^4$$

両辺の常用対数をとると

$$\left(n - \frac{1}{2} \right) \log_{10} 2 \geq 4 \quad \text{ゆえに } n \geq \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{ここで } \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{0.301} + 0.5 = 13.7 \dots$$

よって、求める最小の自然数 n は $n = 14$

(3) (1),(2)の結果から

$$|z_{14}| = \frac{10000}{2^{14-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^9} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{512} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg z_{14} = \left(\frac{14}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{7}{12} \pi + 2\pi$$

$$|z_{15}| = \frac{10000}{2^{15-\frac{1}{2}}} = \frac{2^4 \cdot 5^4}{2^{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5^4}{2^{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{625}{1024} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \cdot \frac{5}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{128} \sqrt{\frac{25}{32}} < \frac{1}{2}$$

$$\arg z_{15} = \left(\frac{15}{6} + \frac{1}{4} \right) \pi = \frac{3}{4} \pi + 2\pi$$

したがって、 P_{14} は $\triangle ABC$ の外部にあり、 P_{15} は $\triangle ABC$ の内部にある。

よって、求める最小の自然数 n は $n = 15$

2.2.3 九州大学 理学部数学科 (一般後期) 問題分析 (2017)

4 題 (150 分) で, 一般前期試験よりも解きやすいのではないだろうか.

1 (空間のベクトル)

基本ベクトルで考えるとよい.

- (1) \vec{a} と \vec{b} が垂直であるから, $\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とし, \vec{e}_1 と \vec{e}_2 に垂直な単位ベクトルを \vec{e}_3 とする. このとき, \vec{c} は, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を用いて

$$\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{c} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + (\vec{c} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3$$

点 H は xy 平面上の点であるから

$$\overrightarrow{OH} = (\vec{c} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{c} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

- (2) G は $\triangle OAB$ の重心であるから $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$

\vec{a} と \vec{b} は 1 次独立であり, 点 H は O と異なる直線 OG 上の点である.

したがって, 上式および (1) の結果より $\frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

これに $\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{c}| |\vec{a}| \cos \alpha$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = |\vec{c}| |\vec{b}| \cos \beta$ を代入すると

$$\frac{|\vec{c}| |\vec{a}| \cos \alpha}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{c}| |\vec{b}| \cos \beta}{|\vec{b}|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

2 (複素数平面)

(1),(2) は典型的な問題の 1 つであり, 大半の受験者ができたと思える.

(1) 基本題.

(2) (1) の結果を利用することで, $t^3 + t^2 - 2t = 1$ を得る.

(3) $t = \alpha + \bar{\alpha} = 2 \cos \frac{2\pi}{7} > 0$. $f(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1$ の増減表を利用すると

$$\frac{6}{5} < t < \frac{7}{5} \text{ において } f(t) \text{ が単調増加で, } f\left(\frac{6}{5}\right) < 0 < f\left(\frac{7}{5}\right).$$

$2 \cos \frac{2\pi}{7}$ は, $f(t) = 0$ の解であるから

$$\frac{6}{5} < 2 \cos \frac{2\pi}{7} < \frac{7}{5} \quad \text{よって} \quad \frac{3}{5} < \cos \frac{2\pi}{7} < \frac{7}{10}$$

3 (微分法とその応用)

誘導に従って解答すればよい.

- (1) $C: y = -x^2 - 1$ 上の異なる 2 点 $P_1(x_1, -x_1^2 - 1)$, $P_2(x_2, -x_2^2 - 1)$ を通る直線の方程式は

$$y = -(x_1 + x_2)x + x_1x_2 - 1$$

この直線と x 軸との交点の x 座標 a は, $x_1 + x_2 \neq 0$ より $a = \frac{x_1x_2 - 1}{x_1 + x_2}$

- (2) $(f(t), f'(t))$ が $y = -x^2 - 1$ 上にあるためには, $f'(t) = -\{f(t)\}^2 - 1$ が成り立つことを示せばよい.

- (3) (1) の結果に $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(t_2)$ を代入するとよい.

- (4) P_1 の x 座標について, $f(\alpha) = \sqrt{3}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) とおくと

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$$

- (3) の結果に $a = 1$, $t_1 = \frac{\pi}{6}$, $t_2 = t$ を代入するとよい.

4 (確率)

前期試験の確率よりも簡単で, 丁寧に考えると難しくはない.

- (1) 移動が $+1, -1, 0$ となる回数が, それぞれ $(1, 1, 1)$ または $(0, 0, 3)$
(2) 移動が $+1, -1, 0$ となる回数が, それぞれ $(n-1, 1, 0)$ または $(n-2, 0, 2)$
(3) $k = 0, 1, 2, 3$ のそれぞれの場合と $4 \leq k \leq 6$ の場合に分けて考える.

2.2.4 九州大学 工学部 (一般後期) 問題分析 (2017)

5 題 (120 分) で, 一般前期試験よりも時間が短く難易度が高い. 発展的な内容も多く, 具体的な解説は解答の中に掲載している.

1 (微分法とその応用)

微分幾何で扱われる曲率半径に関する出題で, 2009 年の一般前期理系でも出題されている.

(1) (2) を求めるための準備.

(2) 曲線 $y = f(x)$ の曲率を κ , 曲率半径を r とすると (2009 年理系 3 参照)

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + \{f'(x)\}^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad r = \frac{1}{\kappa}$$

与えられた関数を変形すると, $x = y^2$ ($y \geq 0$) であるから, $g(y) = y^2$ とすると, $g'(y) = 2y$, $g''(y) = 2$. したがって

$$\kappa = \frac{g''(p)}{(1 + \{g'(p)\}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\{1 + (2\sqrt{p})^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4p)^{\frac{3}{2}}}$$

よって
$$r = \frac{(1 + 4p)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

2 (確率)

大問からなる確率の問題としてはめずらしい. 大問からなる問題では, 採点者に分かりやすい答案を書くことが大切で, 仮に途中の計算が間違っただとしても, 九大では答案の内容が論理的に正しければ加点されるそうです.

3 (空間のベクトル)

本題は, オーソドックな問題で完答したい.

4 (微分法とその応用)

必要な場合分けも示してあるので, 取り組みやすい.

5 (数列)

ゼッケンドルフの定理に因んだ出題で, 5 題中最も難しい. 数学的帰納法についても, $n \leq k$ のとき成り立つと仮定して $n = k + 1$ のとき成り立つことを示すパターンで, 慣れていない受験生も多かったのではないかな.

ゼッケンドルフ (Zeckendorf) の定理

任意の自然数 n は, 連続するフィボナッチ数を含まず, 相異なるフィボナッチ数の和として一意に表される.

3 熊本大学

3.1 熊本大学 出題分野

2015年度入試は、新課程での初年度の入学試験であったため、旧課程履修者への配慮からデータの分析(数学I)、整数の性質(数学A)、複素数平面(数学III)の分野からの出題はなかったが、2016・2017年度入試を通じて出題分野に傾向が現われてきたようである。

3.1.1 熊本大学 文系(一般前期) 出題分野

「微分法と積分法」(数学II)からの出題が定着しており、数学Bの「数列」または「空間ベクトル」から必ず出題されている。

また、2年連続で「場合の数と確率」の分野から出題されたことに注意したい。

前期	熊本大学 文系	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学I	数と式							1					
	2次関数			1									
	図形と計量						1					1	
	データの分析											2	
数学A	場合の数と確率	1	1*		2	3*						2	2
	整数の性質						2		1			3	
	図形の性質												
数学II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式												
	三角関数				3								
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法	3	3	3	1	1,2	3	3,4	2	2,3,4	1,4	4	4
数学B	平面上のベクトル	4				4							
	空間のベクトル		2		4		4		3	1	2		1
	数列	2	4	2,4				2	4		3	3	3
	確率分布と統計												

数字は問題番号(*は旧課程の内容を含む)

3.1.2 熊本大学 理系 (一般前期) 出題分野

2016・2017年度入試では、現行課程で導入された複素数平面の分野からの出題があったことに注意したい。数学 III の微積は必題であるが、数学 B の空間のベクトルおよび数列からの出題率の高さに特徴がある。

前期	熊本大学 理系	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学 I	数と式							1					
	2次関数												
	図形と計量												
	データの分析												
数学 A	場合の数と確率	1	2*		3		1						
	整数の性質											2	
	図形の性質												
数学 II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式												
	三角関数					1							
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法		1	1							1		
数学 B	平面上のベクトル					2	2						
	空間のベクトル	2							2	1	2	1	1
	数列			2					1		3	2	4
	確率分布と統計												
数学 III	式と曲線						4						
	複素数平面											3	2
	関数												
	極限				2					3			
	微分法とその応用	3	4					3	3	2		4	3
	積分法	3		4	1,4	3,4	3	4	3		4		
	積分法の応用	4	3						4	4		4	3
旧課程	行列 (数学 C)		3	3				2					

数字は問題番号 (* は旧課程の内容を含む)

3.1.3 熊本大学 医学部医学科 (一般前期) 出題分野

医学部医学科は、2009年度入試から独自問題となったが、理系との共通問題や理系の問題を応用したものが出題されるなど、完全に独立した問題ではない。積分法(数学Ⅱ・Ⅲ)が毎年出題されていることに加え、問題の大半が数学Ⅲの分野に集中している。昨年度からの新課程への本格移行に伴い、複素数平面(数学Ⅲ)の分野から出題されるようになったことに注意したい。

前 期	熊本大学 医学科	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学Ⅰ	数と式									
	2次関数									
	図形と計量							1		
	データの分析									
数学Ⅱ	場合の数と確率	3	2		1	1				
	整数の性質			1						
	図形の性質									
数学Ⅲ	式と証明									
	複素数と方程式									
	図形と方程式					4				
	三角関数									1
	指数関数と対数関数									
	微分法と積分法			4						
数学Ⅳ	平面上のベクトル								1	
	空間のベクトル		1	2	4	2	1	2		
	数列	2	3					3,4		
	確率分布と統計									
数学Ⅴ	式と曲線			3						
	複素数平面								3	2
	関数									
	極限		4					4		4
	微分法とその応用						2,3	1	2,4	3
	積分法	4	3,4		3	3		4	4	
	積分法の応用						4		2	3
旧課程	行列(数学Ⅵ)	1			2					

数字は問題番号

3.1.4 熊本大学 理学部 (一般後期) 出題分野

必ず出題される数学 III の微積に加え，特定の分野からの出題に集中していたが，今年度は，現行課程から導入された「整数の性質」の分野から出題されており，今後対応が必要になると思われる．

後 期	熊本大学 理学部	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
数学 I	数と式												
	2 次関数												
	図形と計量												
	データの分析												
数学 A	場合の数と確率												
	整数の性質												1
	図形の性質												
数学 II	式と証明												
	複素数と方程式												
	図形と方程式	1			1		2	2	2	1	1		
	三角関数				2								
	指数関数と対数関数												
	微分法と積分法												
数学 B	平面上のベクトル					2							
	空間のベクトル											1	
	数列										2		2
	確率分布と統計												
数学 III	式と曲線	2											
	複素数平面												
	関数												
	極限		1,3	2	3						3		
	微分法とその応用	3,4	2	3			3	3	3				
	積分法	3		2	3	3	3		3	3	3	2,3	3
	積分法の応用	4	2	3									
旧課程	行列 (数学 C)		1	1		1	1	1	1	2			

数字は問題番号

3.2 熊本大学 問題分析 (2017)

3.2.1 熊本大学 文系 (一般前期) 問題分析 (2017)

近年難化傾向にあり，毎年出題されている微積分の問題でも以前のようなパターン化された出題ではなくなった．

1 (空間のベクトル)

高校数学の範囲外であるが，ベクトル積 (外積) を知っていれば，検算としても使える．

- (1) 内積を用いた基本問題．
- (2) $H(x, y, z)$ とおき， H が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点であることを利用する．
- (3) (2) で求めた c をもとに， $|\overrightarrow{AB}|$ ， $|\overrightarrow{AC}|$ ， $\sin \theta$ を求めて

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$$

に代入するのではなく， c のまま計算して， $S = \sqrt{5c^2 + 16}$ を導き，これに (2) の結果を代入することが計算のポイント．

補足 $\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, c)$ について

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 2(2c, c, 4) \quad \text{ゆえに} \quad S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5c^2 + 16}$$

2 (確率)

試行を n 回行う問題設定のため，計算式が煩雑になり，文系の受験生にとっては難しかった．

- (1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る事象は， $n - 1$ 回目までに 2 度赤玉が出て， n 回目に赤玉が出ることに気づくかがポイント．求める確率を $P(A)$ とすると

$$P(A) = {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10}$$

- (2) $n - 3$ 個の白玉を一行に並べ，赤玉をその間と両側を含めた $n - 2$ 箇所から赤玉を配置する 3 箇所を選ぶ確率．

$${}_{n-2}C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & n-4 & n-3 & n-2 \\ \vee & \vee & \vee & \vee & & \vee & \vee & \vee \\ \text{白} & \text{白} & \text{白} & \dots & & \text{白} & \text{白} & \end{array}$$

- (3) 2度以上連続することなく n 回目に3度目の赤玉が出る確率を $P(A \cap B)$ とすると

$$P(A \cap B) = {}_{n-3}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3} \times \frac{3}{10}$$

求める確率 $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ の計算は煩雑である.

3 (数列)

数列に関する出題であるが、接線の方程式との融合問題. 計算自体は難しくはないが、計算ミスや標記ミスなどを誘発する問題である.

(1) ~ (3) の中で (1) が難しく、逆に、(2), (3) が易しい. また、(2), (3) は前問ができていないと解けない設定になっているため、本題 (1) は合否に関わる問題でもある.

- (1) 曲線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(a_n^2, f(a_n^2))$ における接線は、そのまま計算するとミスを招くので、 $t = a_n^2$ とおくなどして、簡潔に計算を行うことがポイント. また、解答には帰納的な記述が要求される.
- (2) (1) ができていれば、(2) は簡単であるから、(1) の出来、不出来で差がつくところである.
- (3) (2) ができていれば、(3) は難しくない. ただ、正解が $a_n = 2^{2n+1}$ であるから、 $a_n = 2^{2n+1}$ や $a_n = 2^{2n+1}$ などと誤解されないように標記には注意が必要である.

4 (微分法と積分法)

3次関数と2次関数のグラフの異なる2つの共有点 A, B とその3次関数のグラフ上の2点 A, B における接線を l_A, l_B とする. このとき、 l_A, l_B および2次関数のグラフで囲まれた図形の面積.

- (1) C_1 と C_2 の共有点の1つの x 座標が t であることに気づくと、方程式

$$(x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\} = 0 \quad \dots (*)$$

を得る. 条件により、この方程式は異なる2つの実数解をもつことから、2重解をもつ. t が2重解であるときと2重解でないときの次の2つに場合分けを行う.

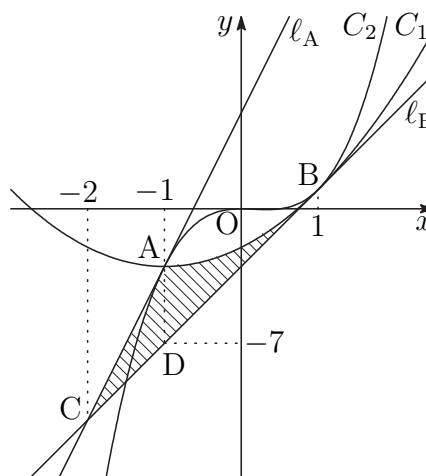
- (i) t が (*) の2重解であるとき、 t は $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の解である.
 - (ii) t が (*) の2重解でないとき、 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ は重解をもつ.
- (i), (ii) によって得られた t の値について (*) の解として条件に適するか確認しながら求める必要があり、 $t = -1$ の結論を得るまで苦慮した受験生も多かったと思われる.

(2) $C_1 : y = (x-t)^2 + 2t^3 - t^2$ は, (1)の結果から $t = -1$ より,

$$C_1 : y = (x+1)^2 - 3$$

$$C_2 : y = 2x^3 - x^2$$

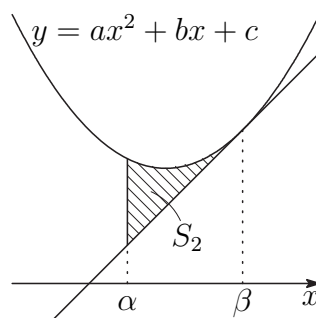
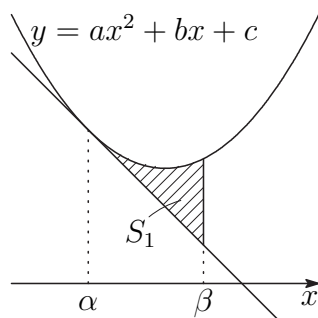
C_1 と C_2 の2つの交点 $A(-1, -3)$, $B(1, 1)$ における C_2 のそれぞれの接線 ℓ_A, ℓ_B について, 点 B において C_1 と C_2 は1次の接触をなすので, ℓ_B は, B における C_1 と C_2 の共通接線である.



求める面積は上の図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \triangle ACD + \int_{-1}^1 \{(x^2 + 2x - 2) - (4x - 3)\} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \{-3 - (-7)\} + \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx \\ &= 2 + \left[\frac{1}{3}(x-1)^3 \right]_{-1}^1 = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

補足 放物線と直線で囲まれた図形の面積を求める問題は頻出である. 次の公式は非常に有効である.



$$S_1, S_2 \text{ は, ともに } \frac{|a|}{3}(\beta - \alpha)^3$$

3.2.2 熊本大学 理系(一般前期) 問題分析(2017)

2016年度入試で現課程へ本格移行し、傾向が明確になったようである。2016年度、2017年度の出題分野は、数学Bの「空間のベクトル」「数列」、数学IIIの「複素数平面」「微分法・積分法の応用」であり、全く同じ分野からの出題であった。難易度も昨年同様であった。

1 (空間のベクトル)

文系の 1 の座標を $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ のように一般化した問題設定であったが、逆に計算の段階で特徴が見えて分かり易かったのではないだろうか。また、高校数学の範囲外であるが、ベクトル積(外積)を知っていれば、検算としても使える。

(1) 内積を用いた基本問題。

(2) $H(x, y, z)$ とおき、 H が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の点であることを利用する。

(3) $S = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ および $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ より

$$S = \frac{abc}{2} \sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{abc}{2}$$

$a = 3$, すなわち, $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$ のときの $S = \frac{3}{2}bc$ の最小値

b^2 と c^2 の相乗平均・調和平均の関係から求めてもよいが, $\frac{1}{b^2}$ と $\frac{1}{c^2}$ の相加平均・相乗平均の関係からも求めることができる。

補足 「相乗平均 \geq 調和平均」の大小関係は「相加平均 \geq 相乗平均」の大小関係から導かれる。

$a = 3$ という条件がない場合は, 3数 $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2} > 0$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{3}{(abc)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{ゆえに} \quad abc \geq 3\sqrt{3}$$

よって $S \geq \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (等号は $a = b = c = \sqrt{3}$ のとき)

2 (複素数平面)

(1), (2) は共に原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ だけ回転する計算を含むので, この回転を w で統一させることがポイント.

(1) $C(z)$ は O を中心に $B(\beta)$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させたもの.

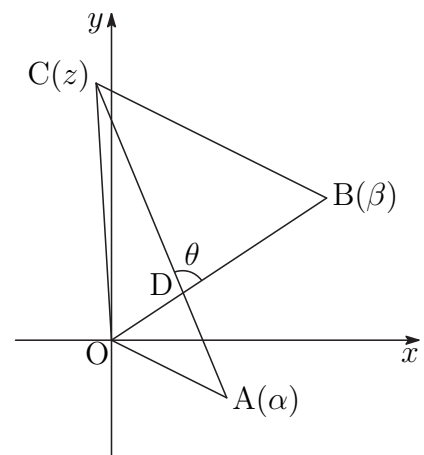
(2) 与えられた方程式を解くことで, $B(\beta)$ は O を中心に $A(\alpha)$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し, 2 倍に拡大したものである ($|\beta| = 2|\alpha|$).

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2w, \quad \frac{z}{\beta} = w \quad \text{より} \quad \beta = 2w\alpha, \quad z = 2w^2\alpha$$

(3) (2) の結果から, $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned} \frac{z - \alpha}{\beta} &= \frac{2w^2\alpha - \alpha}{2w\alpha} = \frac{1}{2} \left(2w - \frac{1}{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} (1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

$$\theta = \arg \frac{z - \alpha}{\beta} \quad \text{より} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}}$$



3 (微分法の応用, 積分法の応用)

対数関数 (凸関数) のグラフと直線の交点は高々2個であることに留意する. 毎年出題される分野であるが, 今年は基本問題であった.

- (1) 極値を求める基本問題.
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ を解くのではなく, 実験的に数値を代入し $f(x) = 0$ を満たす x を2つ求めればよい.
- (3) 基本的な定積分の問題.

4 (数列)

数列に関する出題であるが, 接線の方程式との融合問題.

- (1) 曲線 $y = x^2 + x$ 上の点 $(a_n^j, f(a_n^j))$ における接線は, そのまま計算するとミスを招くので, $t = a_n^j$ とおくなどして, 簡潔に計算を行うことがポイント. また, 解答には帰納的な記述が要求される.
- (2) (2) は簡単であるから, (1) の出来, 不出来で差がつく.
- (3) $j = 1$ のときと $j \geq 2$ のときで場合分けが必要.

3.2.3 熊本大学 医学部医学科 (一般前期) 問題分析 (2017)

昨年の問題が医学科としては簡単であったため、その反動として難しくなっているが、例年よりも難しくなっている。また、数学 III の分野からの出題が目立つ。

1 (三角関数)

問題の設定から、結論が予測されるので、そこを目指して解答をかく。

(1) 与えられた式を証明する意味で基本問題。

(2) $z = \frac{\pi}{6}$ は受験生にとっては解き易い問題設定になっている。

補足 z を定数 θ に固定すると、 S が最小となるのは、 $y = x$ のときで (解答を参照)、このとき、 $z = \frac{\pi}{2} - 2x$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2}{\tan x} + \tan 2x = \frac{2}{\tan x} + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

ここで、 $t = \tan x$ 、 $f(t) = \frac{2}{t} + \frac{2t}{1-t^2}$ ($0 < t < 1$) とおくことで最小値を求めることができる。

2 (複素数平面)

理系の 2 を難しくしたもの。

(1) $D(z)$ は $A(\alpha)$ を中心に $C(\gamma)$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させてもの。

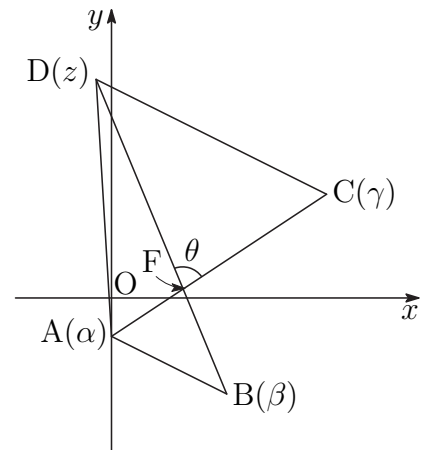
(2) 与えられた方程式を解くことで、 $C(\gamma)$ は $A(\alpha)$ を中心に $B(\beta)$ を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転し、2 倍に拡大したものである ($|\gamma - \alpha| = 2|\beta - \alpha|$)。

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = 2w, \quad \frac{z - \alpha}{\gamma - \alpha} = w \text{ より } \gamma - \alpha = 2w(\beta - \alpha), \quad z - \alpha = 2w^2(\beta - \alpha)$$

(3) (2) の結果から、 $w = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ より

$$\begin{aligned} \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha} &= \frac{z - \alpha - (\beta - \alpha)}{\gamma - \alpha} \\ &= \frac{2w^2(\beta - \alpha) - (\beta - \alpha)}{2w(\beta - \alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \left(2w - \frac{1}{w} \right) = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

$$\theta = \arg \frac{z - \beta}{\gamma - \alpha} \text{ より } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2}}$$

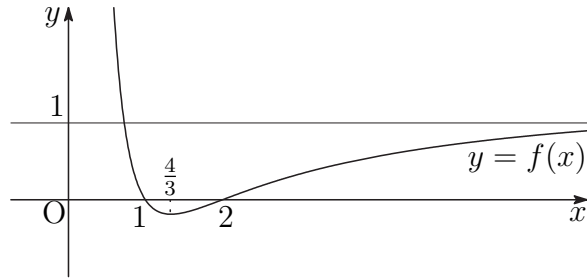


3 (微分法の応用, 積分法の応用)

変曲点における接線の方程式が問題の鍵になる。(1)が解けないと(2),(3)は解けない。(2),(3)は難しくはないので,(1)は合否を決める1題となる。

(1) C の変曲点の x 座標 2 が求める t の値。

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線 ℓ が P 以外に共有点をもたないような t の最大値は, C の変曲点の x 座標 2 である。



$y = f(x)$ と $y = f'(t)(x - t) + f(t)$ は, $x = t$ で1次の接触をなす。 $f(x)$ は有理関数であるから, $f(x) - \{f'(t)(x - t) + f(t)\}$ は $(x - t)^2$ を因数にもつことに注意して計算する。

$$\begin{aligned} & f(x) - \{f'(t)(x - t) + f(t)\} \\ &= 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} - \left(\frac{3}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right)(x - t) - \left(1 - \frac{3}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \\ &= -3 \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}(x - t) \right\} + 2 \left\{ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}(x - t) \right\} \\ &= -3(x - t) \left(-\frac{1}{xt} + \frac{1}{t^2} \right) + 2(x - t) \left(-\frac{x + t}{x^2t^2} + \frac{2}{t^3} \right) \\ &= -3(x - t) \cdot \frac{-t + x}{xt^2} + 2(x - t) \cdot \frac{-t(x + t) + 2x^2}{x^2t^3} \\ &= -3(x - t)^2 \cdot \frac{1}{xt^2} + 2(x - t) \cdot \frac{(x - t)(2x + t)}{x^2t^3} \\ &= (x - t)^2 \left\{ -\frac{3}{xt^2} + \frac{2(2x + t)}{x^2t^3} \right\} = \frac{(x - t)^2 \{(-3t + 4)x + 2t\}}{x^2t^3} \end{aligned}$$

方程式 $f(x) - \{f'(t)(x - t) + f(t)\} = 0$ の解 $x > 0$ が1個であるのは

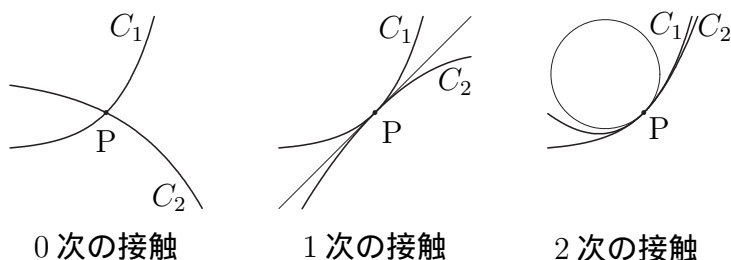
$$\begin{aligned} -3t + 4 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < t \leq \frac{4}{3} \quad \text{のとき} \quad x = t \quad \text{の1個} \\ \frac{2t}{3t - 4} = t \quad \text{すなわち} \quad t = 2 \quad \text{のとき} \quad x = 2 \quad \text{の1個} \end{aligned}$$

(2) C の変曲点 $(2, 0)$ における接線の傾き $\frac{1}{4}$ の直線を基準に求めるとよい。

(3) 医学部医学科の受験生にとって比較的簡単な問題。

解説 2 曲線 $C_1 : y = f(x)$, $C_2 : y = g(x)$ の共有点 P の x 座標を α とする .

1. $f(\alpha) = g(\alpha)$ であるとき , C_1 と C_2 は P で 0 次の接触をなすという .
2. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ であるとき , C_1 と C_2 は P で 1 次の接触をなすといい , P における C_1 および C_2 の接線が一致する .
3. $f(\alpha) = g(\alpha)$, $f'(\alpha) = g'(\alpha)$, $f''(\alpha) = g''(\alpha)$ であるとき , C_1 と C_2 は P で 2 次の接触をなすといい , P における C_1 および C_2 の接触円 (曲率円)¹が一致する .



一般に , $f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) が成り立つとき , C_1 と C_2 は P で n 次の接触をなすという .

4 (極限)

区分求積法で得られる計算結果

$$\log n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log n + 1 \quad \dots (*)$$

を利用することに気づくかがポイント .

- (1) 簡単な計算であるが , (2) の理由を考えるための計算 .
- (2) 順列 a_1, a_2, \dots, a_n の例を挙げ , さらに理由を示すことは簡単ではない .
- (3) S_n を求め , その結果に (*) を適用することがポイント .

補足 (*) はオイラーの定数 γ に関係している .

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) \doteq 0.5772156649 \dots$$

は無理数であるかどうかさえ分かっていない .

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai.ri.2009.pdf> 3 解説を参照 .

3.2.4 熊本大学 理学部 (一般後期) 問題分析 (2017)

例年，一般前期試験よりも簡単な問題が出題されている。

1 (性質の性質)

- (1) A が偶数であることを示すため，法 2 に関する合同式を用いる。
- (2) abc が 3 の倍数ではないので， a, b, c は 3 の倍数ではない。このことから， a, b, c は法 3 に関して 1 または -1 と合同。
- (3) (2) で示したことから， a^2, b^2, c^2 は，法 3 に関して 1 と合同。

2 (数列)

- (1) 基本問題。
- (2) (1) の結果を用いて計算する。ただ， $a_1 < 0$ という条件が与えてあるが，実際は不要な条件である。

3 (微分法の応用，積分法)

- (1) 積分区間を $[0, x], [x, \pi]$ に分けて求める。
- (2) $\sin \alpha = \frac{2}{\pi}$ となる $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を用いて，増減表をつくる。
- (3) (2) の結果から，グラフが $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ に関して対称である。