1. $R=\mathrm{AB}$，$r=\mathrm{CD}$，$\theta=\mathrm{CAB}$ とする．$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とし，与えられた点を複素数平面上の点として，$\mathrm{A}(0)$，$\mathrm{B}(R)$，$\mathrm{P}(Rw\cos\theta)$，$\mathrm{C}((R+r)w\cos\theta)$，$\mathrm{D}((R+r)w\cos\theta-r)$，$\mathrm{M}((R+r)w\cos\theta-\frac{r}{2})$，$\mathrm{Q}(R\overline{w}\cos\theta)$ とおくと

$$\begin{aligned}
\angle\mathrm{AMB}&=\arg\left(\frac{R-(R+r)w\cos\theta+\frac{r}{2}}{0-(R+r)w\cos\theta+\frac{r}{2}}\right)\\
&=\arg\left(\frac{2R(w\cos\theta-1)+r(2w\cos\theta-1)}{2Rw\cos\theta+r(2w\cos\theta-1)}\right)\\
&=\arg\left(\frac{2Riw\sin\theta+rw^2}{2Rw\cos\theta+rw^2}\right)=\arg\left(\frac{2Ri\sin\theta+rw}{2R\cos\theta+rw}\right),\\
\angle\mathrm{CQD}&=\arg\left(\frac{(R+r)w\cos\theta-r-R\overline{w}\cos\theta}{(R+r)w\cos\theta-R\overline{w}\cos\theta}\right)\\
&=\arg\left(\frac{R(w-\overline{w})\cos\theta+r(w\cos\theta-1)}{R(w-\overline{w})\cos\theta+rw\cos\theta}\right)\\
&=\arg\left(\frac{2Ri\sin\theta\cos\theta+ri\sin\theta}{2Ri\sin\theta\cos\theta+rw\cos\theta}\right)=\arg\left(\frac{i\tan\theta(2R\cos\theta+rw)}{2Ri\sin\theta+rw}\right)
\end{aligned}$$

したがって　　$\angle\mathrm{AMB}+\angle\mathrm{CQD}=\arg(i\tan\theta)$

$i\tan\theta$ は純虚数であるから　$\angle\mathrm{AMB}+\angle\mathrm{CQD}=90^\circ$

2. (具体的なところから解説します．)

$a_1=1$，$a_{k+1}={a_k}^2+1\ (k=1,2,\ldots)$ より

$$\begin{aligned}
a_1&=1,\\
a_2&=2,\\
a_3&=5,\\
a_4&=26=2\times 13,\\
a_5&=677=1\times 677,\\
a_6&=458330=2\times 5\times 45833,\\
a_7&=210066388901=41\times 1277\times 4012193,\\
a_8&=44127887745906175987802=2\times 13\times 7121\times 621113\times 383732149849,\\
a_9&=5\times 509\times 56813\times 21298769\times 63231905090107769384023672021 7,\\
a_{10}&=2\times 677\times 41897\times 1265129\times 49099201\\
&\quad\times 107607299354069145559957230227876529250393922753762187254473486781231 3
\end{aligned}$$

素数 2 は a_2，a_4，a_6，a_8，$a_{10},\ldots$ の因数．

素数 5 は a_3，a_6，a_9，$a_{12},\ldots$ の因数．

素数 13 は a_4，a_8，a_{12}，$a_{16},\ldots$ の因数．

素数 677 は a_5，a_{10}，a_{15}，$a_{20},\ldots$ の因数．

素数 45833 は a_6，a_{12}，a_{18}，$a_{24},\ldots$ の因数．

素数 41，1277，4012193 は a_7，a_{14}，a_{21}，$a_{28},\ldots$ の因数．

たとえば，素数 13 は 4 の倍数の項に表れる因数であるから，素数 13 の巡回位数を 4 と呼ぶことにする．実際，法 13 について

$$1^2+1=2,\ 2^2+1=5,\ 5^2+1=26\equiv 0,\ 0^2+1=1$$

補題 a_k が素数 $p_{k,1}$，$p_{k,2}$，$p_{k,3}$，$\ldots$，$p_{k,j}$ をもつとき

$${a_k}^2\equiv 0\quad ゆえに\quad a_{k+1}\equiv 1\quad (\mathrm{mod}\ p_{k,1}p_{k,2}p_{k,3}\ldots p_{k,j})$$

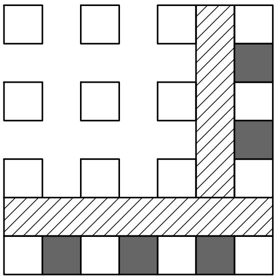
このとき，a_{k+1} は素数 $p_{k,1}$，$p_{k,2}$，$p_{k,3}$，$\ldots$，$p_{k,j}$ をもたない．■

問題にある条件を満たす素数 p_1，p_2，$\ldots,p_n$ が有限個であると仮定し，それらの巡回位数を e_1，e_2，$\ldots,e_n$ とし，$N=e_1e_2\cdots e_n$ とすると

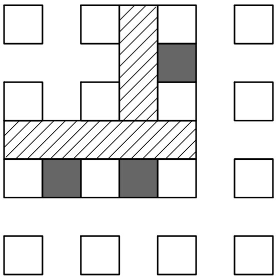
$$a_N\equiv 0\pmod{p_1p_2\cdots p_n}$$

このとき，補題により，a_{N+1} は p_1，p_2，$\ldots,p_n$ を因数にもたないことになり，矛盾．よって，条件をみたす素数 p は無数にある．

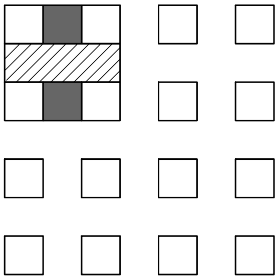
3. 一番外側の四角形は 4 個．それを除いた箇所に長方形を配置する際，回転，鏡像を同一視し，A，B，C の順に長方形を配置する．



A



B



C

	7	5	3	1	計
A	1	1		5	7
B		1	1	3	5
C			1	2	3
				合計	15

よって　　$15 + 4 = 19$ 個

補足 $(2n+1) \times (2n+1)$ のマス目のとき

$$\{3+5+7+\cdots+(2n-1)\}+4 = \{1+3+5+7+\cdots+(2n-1)\}+3 = n^2+3$$

4. $x>0$，$y>0$ より，$y=tx$ とおくと $(t>0)$

$$\begin{aligned}\frac{(x^2+y)(x+y^2)}{xy(x+y)} &= \frac{x^3+y^3+xy(xy+1)}{xy(x+y)}\\ &= \frac{x^2-xy+y^2}{xy}+\frac{xy+1}{x+y}\\ &= t+\frac{1}{t}-1+\frac{tx+\frac{1}{x}}{t+1}\\ &= t+\frac{1}{t}-1+\frac{2\sqrt{t}}{t+1}+\frac{\left(\sqrt{tx}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}{t+1} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

$f(t)=t+\dfrac{1}{t}-1+\dfrac{2\sqrt{t}}{t+1}$ $(t>0)$ とおくと

$$\begin{aligned}f'(t) &= 1-\frac{1}{t^2}-\frac{t-1}{\sqrt{t}(t+1)^2}\\ &= \frac{t-1}{t^2(t+1)^2}\{(t+1)^3-t\sqrt{t}\}\\ &= \frac{t-1}{t^2(t+1)^2}(t+1-\sqrt{t})\{(t+1)^2+\sqrt{t}(t+1)+t\}\\ &= \frac{t-1}{t^2(t+1)^2}\left\{\left(\sqrt{t}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}\{(t+1)^2+\sqrt{t}(t+1)+t\}\end{aligned}$$

$f(t)$ の増減を考えると (増減表は省略)，$f(t)$ は，$t=1$ のとき最小値 2 をとる

$(*)$ より，$t=1$，$x=1$，すなわち，$x=y=1$ のとき最小値 2 をとる．