平成28年度高等学校教育課程熊本県研究協議会及び
ドリームサイエンス・プログラム「理数教育指導者育成講座【数学】」

1. $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ は相異なる1以上9以下の整数である．3つの数 $a\times b\times c$, $d\times e\times f$, $g\times h\times i$ の最大値を N とする．このとき N として考えられる最小の値を求めよ．(JJMO 予選の問題)

2. 実数 x, y, z が $0 < x, y, z < 1$ および
$$\frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{z^2}{1-z} \leqq \frac{3}{2}$$
をみたすとき，
$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \leqq 6$$
が成り立つことを示せ．(EGMO 予選の問題)

3. $AB \neq AC$ なる鋭角三角形 ABC があり，辺 AB, AC の中点をそれぞれ D, E とおく．線分 BE 上の点 P は $\angle APE = \angle BAC$，線分 CD 上の点 Q は $\angle AQD = \angle BAC$ をみたす．3点 A, C, P を通る円と直線 BC の交点のうち C でない方を X，3点 A, B, Q を通る円と直線 BC の交点のうち B でない方を Y とおく．このとき，$BC = XY$ を示せ．ただし，UV で線分 UV の長さを表すものとする．(EGMO 予選の問題)

4. 1/81 を電卓で，1/9801 を電卓または Wolfram alpha 等で計算してみて，このような循環小数になる理由を考えてみて下さい．

5. 放物線の4つの接線から出来る4つの三角形の各々の垂心と外心の垂直2等分線(4本)は1点で交わります．証明を考えてみて下さい．

解答

1. $\quad 2\times5\times7=70,\ 1\times8\times9=3\times4\times6=72$ ゆえに $\min N \leqq 72$

$a\times b\times c,\ d\times e\times f,\ g\times h\times i$ の最大値が N であるから

$$a\times b\times c\times d\times e\times f\times g\times h\times i \leqq N^3 \quad ゆえに \quad 9! = 70\times72^2 \leqq N^3$$

このとき，N は 71 を因数にもたないから $\min N \geqq 72$

よって $\quad \min N = 72$

2. $$\frac{x^2}{1-x} = (1-x) + \frac{1}{1-x} - 2$$

$s=\dfrac{1}{1-x},\ t=\dfrac{1}{1-y},\ u=\dfrac{1}{1-z}$ とおくと ($0<x,y,z<1$ より $s,t,u>1$),

条件式から $$\left(\frac{1}{s}+s-2\right)+\left(\frac{1}{t}+t-2\right)+\left(\frac{1}{u}+u-2\right) \leqq \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u} \leqq \frac{15}{2}-(s+t+u)$$

両辺に $s+t+u>0$ を掛けると

$$(s+t+u)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) \leqq \frac{15}{2}(s+t+u)-(s+t+u)^2$$

上式の左辺は，相加平均・相乗平均の関係を利用すると

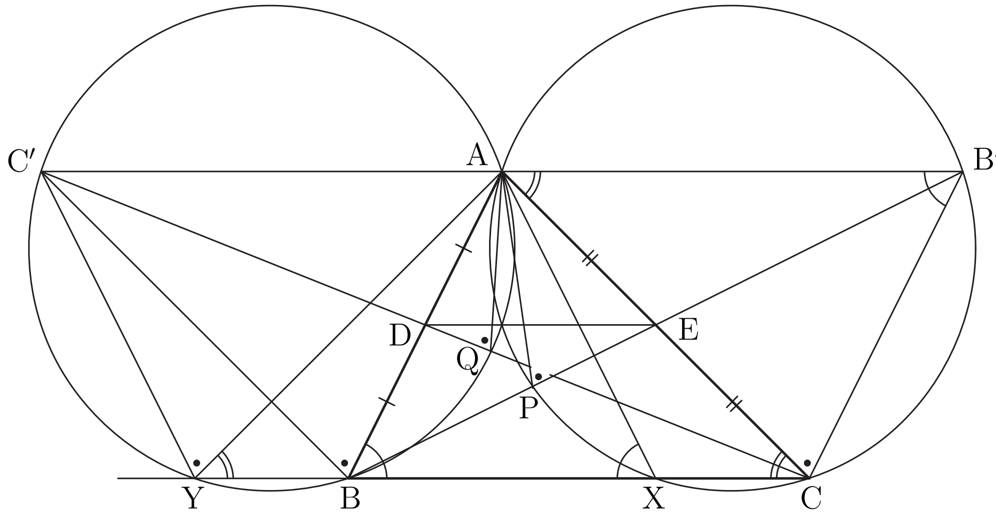
$$\begin{aligned}(s+t+u)\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) &= 3+\frac{t}{s}+\frac{u}{s}+\frac{u}{t}+\frac{s}{t}+\frac{s}{u}+\frac{t}{u} \\ &\geqq 3+6\sqrt[6]{\frac{t}{s}\cdot\frac{u}{s}\cdot\frac{u}{t}\cdot\frac{s}{t}\cdot\frac{s}{u}\cdot\frac{t}{u}} = 9\end{aligned}$$

したがって $$\begin{aligned}&\frac{15}{2}(s+t+u)-(s+t+u)^2 \geqq 9 \\ &2(s+t+u)^2-15(s+t+u)+18 \leqq 0 \\ &\{(s+t+u)-6\}\{2(s+t+u)-3\} \leqq 0\end{aligned}$$

$s+t+u>3$ であることに注意して $3<s+t+u\leqq 6$

よって $$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \leqq 6$$

3. 3点A,C,Pを通る円と直線BEの交点のうちPでない方を$\mathrm{B'}$とし，3点A,B,Qを通る円と直線CDの交点のうちQでない方を$\mathrm{C'}$とする．



条件から　$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{APB'}$

弦$\mathrm{AB'}$の円周角により　$\angle\mathrm{APB'} = \angle\mathrm{ACB'}$

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{ACB'}$となるから　$\mathrm{BA}/\!/\mathrm{CB'}$

これと条件$\mathrm{EA} = \mathrm{EC}$により　$\triangle\mathrm{EAB} \equiv \triangle\mathrm{ECB'}$

したがって，四角形$\mathrm{ABCB'}$は平行四辺形　ゆえに　$\angle\mathrm{ABX} = \angle\mathrm{AB'C}$

四角形$\mathrm{AXCB'}$は円に内接するので　$\angle\mathrm{AXB} = \angle\mathrm{AB'C}$　$\cdots$①

$\angle\mathrm{ABX} = \angle\mathrm{AXB}$であるから　$\mathrm{AB} = \mathrm{AX}$　$\cdots$②

同様に，条件から　$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{AQC'}$

弦$\mathrm{AC'}$の円周角により　$\angle\mathrm{AQC'} = \angle\mathrm{ABC'}$

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{ABC'}$となるから　$\mathrm{CA}/\!/\mathrm{BC'}$

これと条件$\mathrm{DA} = \mathrm{DB}$により　$\triangle\mathrm{DAC} \equiv \triangle\mathrm{DBC'}$

したがって，四角形$\mathrm{AC'BC}$は平行四辺形となる．

四角形$\mathrm{ABCB'}$および四角形$\mathrm{AC'BC}$がともに平行四辺形であるから

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{CB'A} \equiv \triangle\mathrm{BAC'},\quad \mathrm{BC}/\!/\mathrm{B'C'}$$

四角形$\mathrm{AC'YB}$は円に内接するので

$$\angle\mathrm{C'YB} = \angle\mathrm{BAB'}\quad\text{ゆえに}\quad \angle\mathrm{C'YA} + \angle\mathrm{AYB} = \angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{CAB'}$$

$\angle\mathrm{C'YA} = \angle\mathrm{C'BA} = \angle\mathrm{BAC}$であるから　$\angle\mathrm{AYB} = \angle\mathrm{CAB'}$

$\mathrm{AB'}/\!/\mathrm{BC}$より，$\angle\mathrm{CAB'} = \angle\mathrm{BCX}$であるから　$\angle\mathrm{AYB} = \angle\mathrm{BCX}$　$\cdots$③

①，②，③より　$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{AXY}$　よって　$\mathrm{BC} = \mathrm{XY}$

4. $x = 1/81 = 0.0\dot{1}2345679\dot{0}$ とおくと

$$10x - x = 0.\dot{1} = \frac{0.1}{1-0.1} = \frac{1}{9} \quad \text{よって} \quad x = \frac{1}{81}$$

$$\begin{aligned} y = 1/9801 = {} & 0.000\dot{1}020304050607080910111213141516171819202122232425 \\ & 26272829303132333435363738394041424344454647484950 \\ & 51525354555657585960616263646566676869707172737475 \\ & 767778798081828384858687888990919293949596979900\dot{0} \end{aligned}$$

$$100y - y = 0.0\dot{1}0\dot{1} = \frac{0.01}{1-0.01} = \frac{1}{99} \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1}{9801}$$

5. $f(x) = kx^2$ とおく．放物線 $y = f(x)$ 上の異なる 4 点を $\mathrm{A}(a, f(a))$，$\mathrm{B}(b, f(b))$，$\mathrm{C}(c, f(c))$，$\mathrm{D}(d, f(b))$ とし，これらの点における接線をそれぞれ l_A, l_B, l_C, l_D とする．また，l_α と l_β の交点を $\mathrm{P}_{\alpha\beta}$ $(= \mathrm{P}_{\beta\alpha})$ とおく $(\alpha, \beta = \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$．

$$l_\alpha : y = k\alpha(2x - \alpha), \quad l_\beta : y = k\beta(2x - \beta), \quad \mathrm{P}_{\alpha\beta}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ k\alpha\beta\right)$$

2 点 $\mathrm{P}_{\alpha\beta}$，$\mathrm{P}_{\alpha\gamma}$ の垂直二等分線は,

$$x - \frac{2\alpha+\beta+\gamma}{4} + 2k\alpha\left\{y - \frac{k\alpha(\beta+\gamma)}{2}\right\} = 0$$

2 点 $\mathrm{P}_{\beta\gamma}$，$\mathrm{P}_{\beta\alpha}$ の垂直二等分線は,

$$x - \frac{2\beta+\gamma+\alpha}{4} + 2k\beta\left\{y - \frac{k\beta(\gamma+\alpha)}{2}\right\} = 0$$

したがって，l_α，l_β，l_γ からできる三角形の外心を $\mathrm{O}_{\alpha\beta\gamma}$ とすると

$$\mathrm{O}_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4} - k^2\alpha\beta\gamma,\ \frac{1}{8k} + \frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{2}\right)$$

$\mathrm{P}_{\alpha\beta}$ を通り，l_γ に垂直な直線は

$$x - \frac{\alpha+\beta}{2} + 2k\gamma(y - k\alpha\beta) = 0$$

$\mathrm{P}_{\beta\gamma}$ を通り，l_α に垂直な直線は

$$x - \frac{\beta+\gamma}{2} + 2k\alpha(y - k\beta\gamma) = 0$$

したがって，l_α，l_β，l_γ からできる三角形の垂心を $\mathrm{H}_{\alpha\beta\gamma}$ とすると

$$\mathrm{H}_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} + 2k^2\alpha\beta\gamma,\ -\frac{1}{4k}\right)$$

2 点 $\mathrm{O}_{\alpha\beta\gamma}$，$\mathrm{H}_{\alpha\beta\gamma}$ の中点を $\mathrm{M}_{\alpha\beta\gamma}$ とすると

$$\mathrm{M}_{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{3(\alpha+\beta+\gamma)}{8}+\frac{k^2\alpha\beta\gamma}{2},\ \frac{1}{16k}+\frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{4}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{O}_{\alpha\beta\gamma}\mathrm{H}_{\alpha\beta\gamma}} = \left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{4}+3k^2\alpha\beta\gamma,\ -\dfrac{3}{8k}-\dfrac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{2}\right)$ に垂直なベクトルの 1 つを

$$\overrightarrow{\mathrm{N}_{\alpha\beta\gamma}} = \left(\frac{3}{8k}+\frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{2},\ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}+3k^2\alpha\beta\gamma\right)$$

とし，$\overrightarrow{\mathrm{OM}_{\alpha\beta\gamma}}+k\delta\overrightarrow{N_{\alpha\beta\gamma}} = (x_0,\ y_0)$ とすると

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{3(\alpha+\beta+\gamma)}{8}+\frac{k^2\alpha\beta\gamma}{2}+k\delta\left(\frac{3}{8k}+\frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{2}\right)\\
&= \frac{3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{8}+\frac{k^2(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta)}{2},\\
y_0 &= \frac{1}{16k}+\frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{4}+k\delta\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}+3k^2\alpha\beta\gamma\right)\\
&= \frac{1}{16k}+\frac{k(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\delta\alpha+\delta\beta+\delta\gamma)}{4}+3k^3\alpha\beta\gamma\delta
\end{aligned}$$

$(x_0,\ y_0)$ は $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に関する対称式であるから，題意は成立する．

2 番の別解のための準備

曲面 S の方程式を $\mathrm{x}=\mathrm{x}(u^1,u^2)$ とすると，S の第 1 基本量は $(i,j$ について対称$)$

$$g_{ij}=\mathrm{x}_i{\cdot}\mathrm{x}_j \quad (i,j=1,2)$$

曲面の単位法ベクトル n は

$$\mathrm{n}=\frac{\mathrm{x}_1\times\mathrm{x}_2}{|\mathrm{x}_1\times\mathrm{x}_2|}=\frac{\mathrm{x}_1\times\mathrm{x}_2}{\sqrt{g}} \qquad (g=|\mathrm{x}_1\times\mathrm{x}_2|^2=g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2)$$

S の第 2 基本量は $(i,j$ について対称$)$

$$H_{ij}=\mathrm{x}_{ij}{\cdot}\mathrm{n}=\frac{1}{\sqrt{g}}|\mathrm{x}_{ij}\ \mathrm{x}_1\ \mathrm{x}_2| \quad (i,j=1,2)$$

曲面の方程式が $z=\varphi(x,y)$ で与えれたとき，x，y を媒介変数と考えれば，$\mathrm{x}=(x,y,\varphi(x,y))$ より

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad q=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

とおくと

$$\begin{aligned}&\mathrm{x}_1=(1,0,p),\quad \mathrm{x}_2=(0,1,q),\quad \mathrm{n}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p,-q,1),\\&\mathrm{x}_{11}=(0,0,r),\quad \mathrm{x}_{12}=\mathrm{x}_{21}=(0,0,s),\quad \mathrm{x}_{22}=(0,0,t)\end{aligned}$$

曲面 $z=\varphi(x,y)$ の第 1・2 基本量は

$$\begin{aligned}&g_{11}=1+p^2,\quad g_{12}=pq,\quad g_{22}=1+q^2,\\&H_{11}=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad H_{12}=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad H_{22}=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\end{aligned}$$

曲面 $z=\varphi(x,y)$ の全曲率 K は

$$K=\frac{H_{11}H_{22}-{H_{12}}^2}{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2} \qquad \cdots(*)$$

曲面 $f(x,y,z)=0$ について，$f_z \neq 0$ のとき，陰関数定理により局所的に z は x, y の関数であるから

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z},\\
r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-f_{xx}{f_z}^2 + 2f_{xz}f_xf_z - f_{zz}{f_x}^2}{{f_z}^3},\\
s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-f_{xy}{f_z}^2 + f_{xz}f_yf_z + f_{yz}f_xf_z - f_{zz}f_xf_y}{{f_z}^3},\\
t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{-f_{yy}{f_z}^2 + 2f_{yz}f_yf_z - f_{zz}{f_y}^2}{{f_z}^3}
\end{aligned}
$$

上の諸式を $(*)$ に代入して整理すると

$$
K = -\frac{\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}}{({f_x}^2 + {f_y}^2 + {f_z}^2)^2} \qquad \cdots (**)
$$

なお，$f_z = 0$ のときは，$f_x \neq 0$ ならば，x は y，z の関数と考えればよい．また，$f_y \neq 0$ ならば，y は x，z の関数と考えればよい．ただし，$f_x = f_y = f_z = 0$ となる特異点では $(**)$ の全曲率は定義されない．

2 番の別解

$0<x,y,z<1$，$\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{y^2}{1-y}+\dfrac{z^2}{1-z}\leqq\dfrac{3}{2}$ における $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1-z}$ の最大値を求めればよい．

$0<x<1$ において，関数 $\dfrac{x^2}{1-x}$，$\dfrac{1}{1-x}$ は，ともに単調増加であるから

$$0<x,y,z<1,\quad \frac{x^2}{1-x}+\frac{y^2}{1-y}+\frac{z^2}{1-z}=\frac{3}{2}$$

において，$\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1-z}$ は最大値をとる．

ここで，$\dfrac{1}{1-x}$，$\dfrac{1}{1-y}$，$\dfrac{1}{1-z}$ をそれぞれ x，y，z と置き換えることにより，曲面

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{15}{2}=0\quad(x,y,z>1)\quad\cdots①$$

における $x+y+z$ の最大値を考える．

$f(x,y,z)=x+y+z+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{15}{2}$，$x+y+z=k$ とおくと，曲面 $f(x,y,z)=0$ と平面 $x+y+z=k$ が接するとき，$\nabla f=\lambda(1,1,1)$ が成り立つから (λ は定数)

$$\left(1-\frac{1}{x^2},\ 1-\frac{1}{y^2},\ 1-\frac{1}{z^2}\right)=\lambda(1,1,1)$$

上式と ① より　$(x,y,z)=(2,2,2)$

$$f_{xx}=\frac{2}{x^3},\quad f_{yy}=\frac{2}{y^3},\quad f_{zz}=\frac{2}{z^3},\quad f_{xy}=f_{yz}=f_{zx}=0$$

であるから，曲面上の点 $(2,2,2)$ において

$$\lambda=\frac{3}{4},\quad -\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{vmatrix}=\frac{27}{256}>0$$

点 $(2,2,2)$ において，$\lambda>0$．$(**)$ より，$K>0$ であるから (楕円点)，
$x=y=z=2$ で $x+y+z$ は極大値 6 をとる．