高等学校第3学年　数学科　学習指導案(数学A)

期　日　平成28年10月19日(水)
場　所　熊本県立玉名工業高等学校
クラス　機械科3年1組(40名)
指導者　教諭　西村　信一 西村

教材観および生徒観

本時を数学Aの学習指導要領に盛り込まれた課題学習と位置づけ，生徒の関心や意欲を高める課題として，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを認識することを目指す．多面体定理[1] は，中学1年次に履修しているが，高校数学でも魅力ある教材であり，正多面体の存在について同定理を用いて示す．また身近な空間図形について考察を深める．

意欲的な生徒がいる一方で計算を苦手とする生徒もいるが，本時では図形の特徴を理解することを目指し，数学的な見方や考え方のよさを気づかせたい．

本時の学習

過程	指導過程(指)・学習活動(学)	留意点(留)・評価(評)
導入 (5分)	本時の学習内容について説明する(指) 正多面体の定義を確認する(学)	多面体定理を知っているか(留)
展開 (40分)	正十二面体を例に頂点と辺の数の数え上げの特徴を理解する(指) 問5の演習(学)	頂点と辺の数え上げの特徴を理解したか(評)
	いくつかの多面体について頂点・辺・面の数を調べ，多面体定理が成立していることを確認する(学)	多面体定理について興味・関心をもったか(評)
	多面体から1つの面を除いた平面グラフを導入する(指)	樹形では，頂点 − 辺 $=1$(留)
	頂点の切断により切断面では $v-e=0$．また，頂点 -1，面 $+1$ より，$v-e+f$ は不変量(学)	単なる頂点，辺，面の数え上げにならないように特徴を理解(留)
	切頂二十面体と正二十面体の関係について学習する(指)	頂点の切断を正二十面体に適用できたか(評)
	正多面体は5種類だけの証明(指) 角度に注目した証明(学)	多面体定理を利用する(留) 双対性に着目させる(留)
整理 (5分)	3次元における多面体定理と他次元の定理との関連に着目(指)	3次元における考察の重要性を指摘する(留)

[1]学習指導要領に「多面体に関する基本的な性質としては，オイラーの定理を用いて多面体が5種類しかないことなどが考えられる」とある．

関連事項

3 次元の多面体の頂点の数 v，辺の数 e，面の数 f に関するオイラーの多面体定理

$$v - e + f = 2$$

を 4 次元多胞体の頂点の数 a_0，辺の数 a_1，面の数 a_2，胞の数 a_3 に適用した関係式

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

が成立することがフランスの数学者アンリ・ポアンカレによって発見された．

一般に，n 次元の図形 (単体的複体) の m 次元の辺の数を a_m とするとき交代和

$$\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m a_m = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \begin{cases} 2 & (n\text{ が奇数}) \\ 0 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

をオイラー標数と呼び，上式をシュレーフリの n 次元公式という．奇数次元の多胞体のオイラー標数は 2 で，偶数次元の多胞体のオイラー標数は 0 である．

注意

オイラー標数は定数であるが，オイラーの定数 γ は

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

のことを指す．なお，γ は無理数[2] であるかどうかさえ分かっていない．

教育情報の共有化に向けた取り組み

本校数学科は，平成 24 年より工進連[3]の入試情報共有化事業を担当し，同年の数学部会春季総会では過去 12 年分の一般前期試験の問題と解答をまとめた「入試の軌跡　九州大学 (理系・文系)」「入試の軌跡　熊本大学 (理系・文系)」を県内高校に配布した．

平成 26 年から九州数学教育会の研究事業として，九州地区国立大学一般前期試験問題と解答 (全学部全学科) の電子文書化 (PDF) により九州各県の数学部会と情報交換を行っている．現在，九大・熊大は過去 20 年分 (1997 年以降)，九工大・福教大・佐大・長大・分大・宮大・鹿大・琉大は過去 16 年分 (2001 年以降) の問題と解答を次のサイトに PDF で掲載している．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

今年度は，九州地区大学数学入試問題集を製本し，九州各県で利用されている．九州各県で電子文書化が推進されているため，今後とも電子文書による配信を予定している．

[2] e と π の無理性は http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf を参照．

[3]熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会

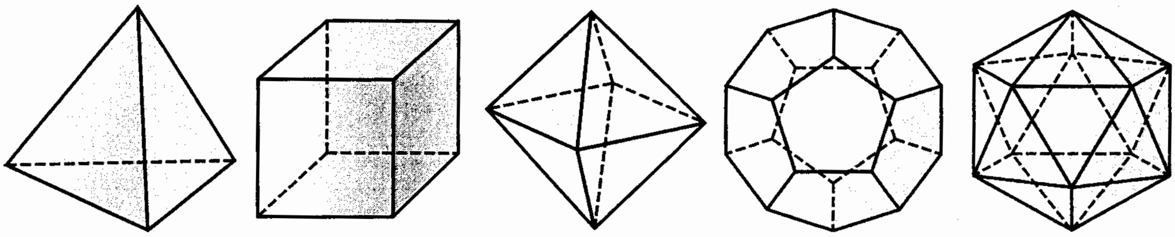
❸ 多面体の性質

立方体や直方体のように，平面だけで囲まれた立体を **多面体** という。多面体は，その面の数によって，四面体，六面体などという。

◆ 正多面体

どの面も合同な正多角形であり，どの頂点にも同じ数の面が集まる，へこみのない多面体を **正多面体** という。

正多面体には，次の 5 種類があることが知られている。



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

正十二面体の 1 つの頂点には，正五角形が 3 つ集まっている。1 つの面には頂点が 5 個あり，1 つの頂点を 3 つの面で共有しているから，頂点の個数は

$$5 \times 12 \div 3 = 20$$

また，1 つの面には辺が 5 本あり，1 つの辺を 2 つの面で共有しているから，辺の本数は

$$5 \times 12 \div 2 = 30$$

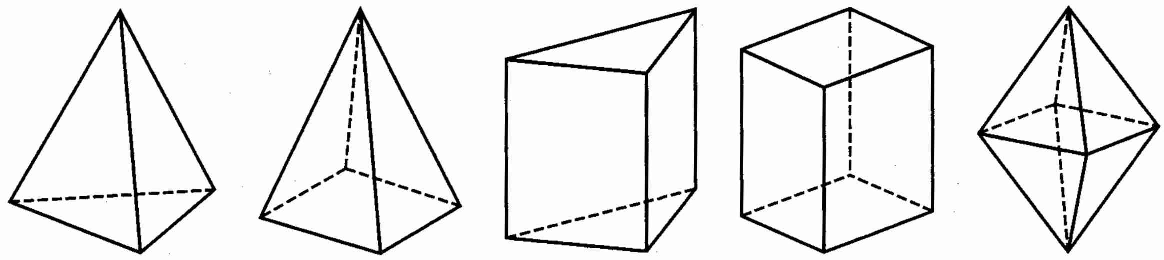
問5　正多面体の頂点や辺について，次の表を完成させよ。

正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5
頂点の数				20	
辺の数				30	

参考 オイラーの多面体定理

多面体の面の数を f，頂点の数を v，辺の数を e として，いろいろな多面体について　(頂点の数)－(辺の数)＋(面の数)

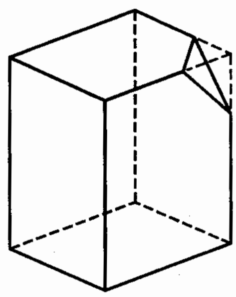
すなわち，　$v-e+f$　の値を調べてみると，次の表のようになる。



三角錐　四角錐　三角柱　直方体　八面体

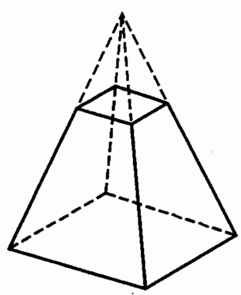
多面体	三角錐	四角錐	三角柱	直方体	八面体
頂点の数（v）	4	5	6	8	6
辺の数（e）	6	8	9	12	12
面の数（f）	4	5	5	6	8
$v-e+f$	2	2	2	2	2

これらの多面体では，$v-e+f=2$ が成り立つ。



次に直方体の一部を切り取ったとき，v，e，f の値は，どのように変化するか調べてみよう。

右の図のように切り取ったとき，頂点の数は1減って3増えるから2だけ増え，辺の数は3だけ増え，面の数は1だけ増える。したがって，$v-e+f$ の値は変化しない。



問1　四角錐の一部を右の図のように切り取ったとき，v，e，f の値はそれぞれどのように変化するか調べよ。また，$v-e+f$ の値は変化しないことを確かめよ。

どのようなへこみのない多面体でも

$$v-e+f=2$$

が成り立つことが知られている。これを **オイラーの多面体定理** という。

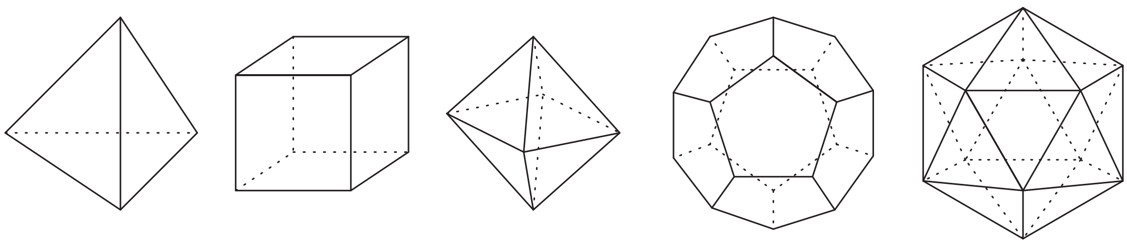
3　多面体の性質

立方体や直方体のように，平面だけで囲まれた立体を**多面体**という．多面体は，その面の数によって，四面体，六面体などという．

◆ 正多面体

どの面も合同な正多角形であり，どの頂点にも同じ数の面が集まる，へこみのない多面体を**正多面体**という．

正多面体には，次の 5 種類があることが知られている．



正四面体　　正六面体　　正八面体　　正十二面体　　正二十面体

正十二面体の 1 つの頂点には，正五角形が 3 つ集まっている．1 つの面には頂点が $\boxed{\quad}$ 個あり，1 つの頂点を $\boxed{\quad}$ つの面で共有しているから，頂点の個数は

$$\boxed{\quad} \times 12 \div \boxed{\quad} =$$

また，1 つの面には辺が $\boxed{\quad}$ 本あり，1 つの辺を $\boxed{\quad}$ つの面で共有しているから，辺の本数は

$$\boxed{\quad} \times 12 \div \boxed{\quad} =$$

問 5　正多面体の頂点や辺について，次の表を完成させよ．

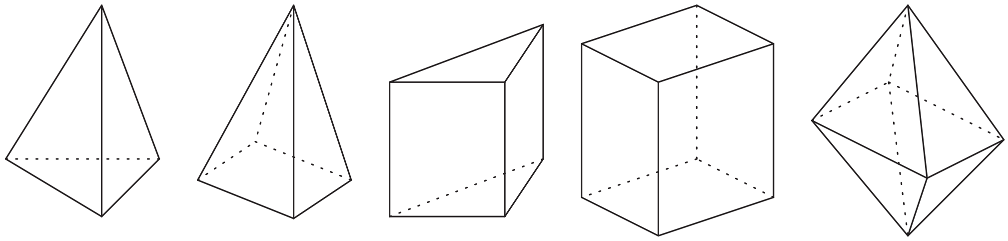
正多面体	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
面の形	正三角形	正方形	正三角形	正五角形	正三角形
頂点に集まる面の数	3	3	4	3	5
頂点の数				20	
辺の数				30	

オイラーの多面体定理

多面体の面の数を f，頂点の数を v，辺の数を e として，いろいろな多面体について

$$(\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{面の数})$$

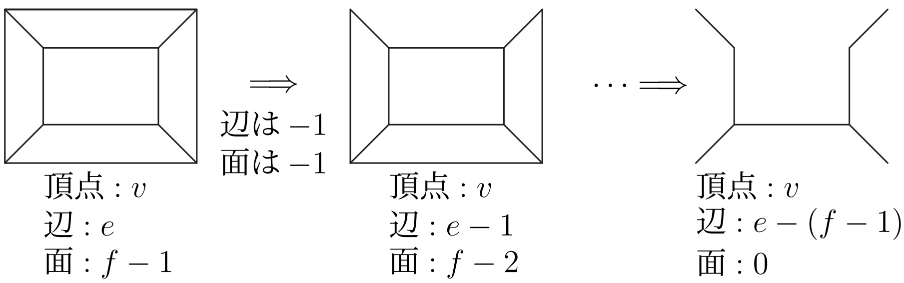
すなわち，$v - e + f$ の値を調べてみると，次の表のようになる．



三角錐　四角錐　三角柱　直方体　八面体

多面体	三角錐	四角錐	三角柱	直方体	八面体
頂点の数 (v)	4	5	6	8	6
辺の数 (e)	6	8	9	12	12
面の数 (f)	4	5	5	6	8
$v - e + f$	2	2	2	2	2

頂点，辺，面の数がそれぞれ v，e，f の多面体の 1 つの面を取り除き，平面グラフ (自己交叉点をもたない平面図形) をつくると (下の図は直方体を例とした)



左側の平面グラフは，多面体の 1 つの面を取り除いたので，面の数は $f-1$．頂点の数を変えずに辺を取り除いていくと，辺の数が 1 つ減る毎に面の面の数も 1 つ減る．この操作を繰り返し，面の数が 0 になったとき，右上のような**樹形**ができる．このとき，辺も面も $f-1$ だけ減るので，樹形の辺の数は $e-(f-1)$ となる．

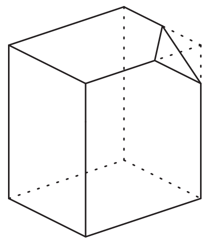
また，樹形の頂点と辺について，(頂点の数) − (辺の数) = 1 であるから

$$v - \{e - (f-1)\} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{v - e + f = 2}$$

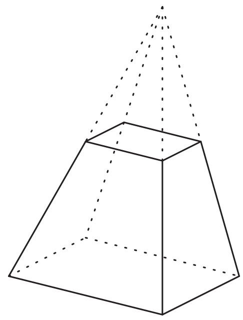
この関係式を**オイラーの多面体定理**という．

次に直方体の一部を切り取ったとき，v，e，f の値は，どのように変化するか調べてみよう．

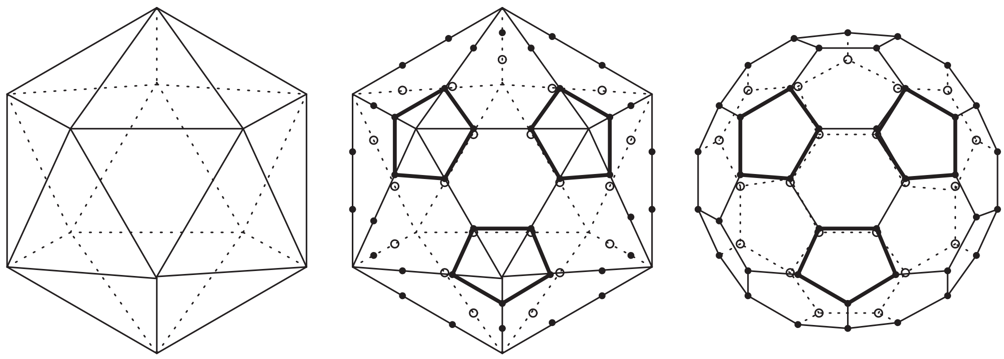
右の図のように切り取ったとき，元の頂点が 1 減って，面が 1 増える．新たにできた三角形の頂点と辺の数は等しい．したがって，$v-e+f$ の値は変化しない．



問 1 四角錐の一部を右の図のように切り取ったとき，v，e，f の値はそれぞれどのように変化するか調べよ．また，$v-e+f$ の値は変化しないことを確かめよ．



正二十面体の各辺を三等分する点をとり，下の中央の図のように頂点を切断していくと，正五角形が現れ，同時に元の正三角形の面は正六角形になる．この正五角形が 12 面と正六角形が 20 面の 2 種類からなる多面体を**切頂二十面体** (三十二面体) という．切面二十面体で最も身近なものがサッカーボールである．



正二十面体　　切頂二十面体

	正二十面体	切頂二十面体
頂点 (v)	12	
辺 (e)	30	
面 (f)	20	
$v-e+f$	2	

トピック

切頂二十面体は，C60 フラーレンと呼ばれる物質の分子構造に現れることからも注目されている．特に，炭素原子が結合する上で極めて安定な構造をしている一方で，化学反応性に富むことから，幅広く研究・開発がなされている．

定理

正多面体は，正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の 5 種類だけである。

証明 1 つの頂点に m 個の正 n 角形が集まっている (1 つの頂点から m 本の辺が出ている) とすると

$$m \geqq 3, \quad n \geqq 3$$

1 つの頂点から m 本の辺が出ていて，1 つの辺を 2 つの頂点で共有しているから，辺の本数 e は

$$e = \frac{mv}{2} \tag{1}$$

また，1 つの面には辺が n 本あり，1 つの辺を 2 つの面で共有しているから，辺の本数 e は

$$e = \frac{nf}{2} \tag{2}$$

(1)，(2) より，$e = \dfrac{mv}{2} = \dfrac{nf}{2}$ であるから

$$v = \frac{2e}{m}, \quad f = \frac{2e}{n} \tag{3}$$

(3) を $v - e + f = 2$ に代入すると

$$\frac{2e}{m} - e + \frac{2e}{n} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (2m + 2n - mn)e = 2mn$$

上式より，次式を満たさなければならない

$$2m + 2n - mn = 4 - (m-2)(n-2) > 0 \tag{4}$$

このとき

$$e = \frac{2mn}{4 - (m-2)(n-2)} \tag{5}$$

(5) を (3) に代入すると

$$v = \frac{4n}{4 - (m-2)(n-2)}, \quad f = \frac{4m}{4 - (m-2)(n-2)} \tag{6}$$

(4) より，$(m-2)(n-2)=1,\ 2,\ 3$ であるから，これらについて場合分けを行う．

［1］$(m-2)(n-2)=1$ のとき，(5)，(6) より

$$e=\frac{2mn}{3},\quad v=\frac{4n}{3},\quad f=\frac{4m}{3} \tag{7}$$

$(m,\ n)=(3,\ 3)$ から　$(e,\ v,\ f)=(6,\ 4,\ 4)$

［2］$(m-2)(n-2)=2$ のとき，(5)，(6) より

$$e=mn,\quad v=2n,\quad f=2m \tag{8}$$

$(m,\ n)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$ から　$(e,\ v,\ f)=(12,\ 8,\ 6),\ (12,\ 6,\ 8)$

［3］$(m-2)(n-2)=3$ のとき，(5)，(6) より

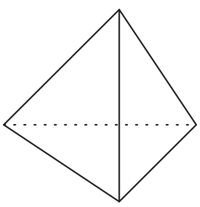
$$e=2mn,\quad v=4n,\quad f=4m \tag{9}$$

$(m,\ n)=(3,\ 5),\ (5,\ 3)$ から　$(e,\ v,\ f)=(30,\ 20,\ 12),\ (30,\ 12,\ 20)$

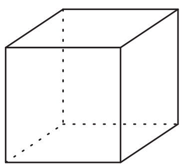
［1］～［3］のそれぞれの場合において，v と f に対称性がある (e は不変量)．なお，多面体定理 $v-e+f=2$ からも v と f の対称性が確認できる．これらの結果を表にまとめると

	e	v	f	$v-e+f$
正四面体	6	4	4	2
正六面体	12	8	6	2
正八面体	12	6	8	2
正十二面体	30	20	12	2
正二十面体	30	12	20	2

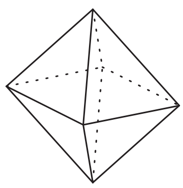
正六面体と正八面体，正十二面体と正二十面体に双対性があることが表からも分かる．なお，正四面体は自己双対であるという．



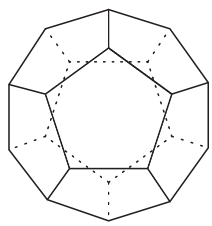
正四面体



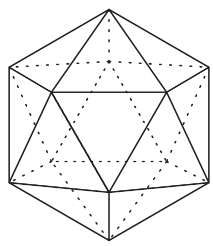
正六面体



正八面体



正十二面体



正二十面体

考察

正多面体ができるための必要条件は

- 1つの頂点に集まる面の数は3つ以上
- 1つの頂点に集まる角度の合計は 360° 未満

したがって，面の形は，正三角形，正四角形，正五角形の3通りである．

面の形	頂点に集まる面の数
正三角形	3, 4, 5
正四角形	3
正五角形	3

例題 正三角形を面とする正多面体で，1つの頂点に5つの面が集まる (1つの頂点から5本の辺が出ている) 正多面体は何か．

解答 正三角形を面とするから，辺の数 e は面の数 f を用いて
(1つの辺は2つの面で共有されている)

$$e = \frac{3f}{2} \quad \text{ゆえに} \quad f = \frac{2}{3}e \quad \cdots ①$$

1つの頂点から5本の辺が出ているから，辺の数 e は頂点の数 v を用いて
(1つの辺は2つの頂点で共有されている)

$$e = \frac{5v}{2} \quad \text{ゆえに} \quad v = \frac{2}{5}e \quad \cdots ②$$

①，② を多面体定理 $v - e + f = 2$ に代入することにより　$e = 30$

これを ①，② に代入して　$f = 20$，$v = 12$　　よって　正二十面体

設問 正五角形を面とする正多面体で，1つの頂点に3つの面が集まる (1つの頂点から3本の辺が出ている) 正多面体は何か．

多面体定理の拡張

1 次元の最も簡単な図形は，2 つの頂点を結ぶ線分である．その線分の頂点，辺の数をそれぞれ c_1^2，c_2^2 とすると

$$c_1^2 = 2, \quad c_2^2 = 1$$

1 次元の線分に対して，この直線上にない 2 次元の点をとる．これらを連結してできる三角形の頂点，辺，面の数をそれぞれ c_1^3，c_2^3，c_3^3 とすると

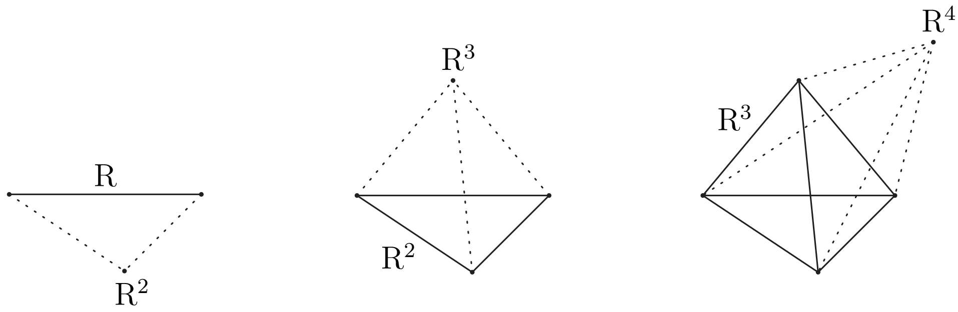
$$\begin{aligned} c_1^3 &= 1 + c_1^2 \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2^3 &= c_1^2 + c_2^2 \\ &= 2 + 1 = 3 \end{aligned} \qquad c_3^3 = 1$$

2 次元の三角形に対して，この平面上にない 3 次元の点をとる．これらを連結してできる四面体の頂点，辺，面，体 (胞ともいう) の数をそれぞれ c_1^4，c_2^4，c_3^4，c_4^4 とすると

$$\begin{aligned} c_1^4 &= 1 + c_1^3 \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2^4 &= c_1^3 + c_2^3 \\ &= 3 + 3 = 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_3^4 &= c_2^3 + c_3^3 \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned} \qquad c_4^4 = 1$$

3 次元の四面体に対して，この空間にない 4 次元の点をとる．これらを連結してできる五胞体の頂点，辺，面，胞の数をそれぞれ c_1^5，c_2^5，c_3^5，c_4^5 とすると

$$\begin{aligned} c_1^5 &= 1 + c_1^4 \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_2^5 &= c_1^4 + c_2^4 \\ &= 4 + 6 = 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_3^5 &= c_2^4 + c_3^4 \\ &= 6 + 4 = 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_4^5 &= c_3^4 + c_4^4 \\ &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$



以上の線分，三角形，四面体，五胞体の頂点，辺，面，胞について

$$\begin{aligned} c_1^2 &= 2 \\ c_1^3 - c_2^3 &= 3 - 3 = 0 \\ c_1^4 - c_2^4 + c_3^4 &= 4 - 6 + 4 = 2 \\ c_1^5 - c_2^5 + c_3^5 - c_4^5 &= 5 - 10 + 10 - 5 = 0 \end{aligned}$$

これを拡張した n 次元の単体的複体の m 次元の辺の数を a_m とすると

$$a_m = c_{m+1}^{n+1} \quad (= {}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1})$$

これらの交代和は

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m a_m &= \sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m c_{m+1}^{n+1} = -\sum_{m=1}^{n}(-1)^m c_m^{n+1} \\
&= c_0^{n+1} + (-1)^{n+1} c_{n+1}^{n+1} - \sum_{m=0}^{n+1}(-1)^m c_m^{n+1} \\
&= 1 + (-1)^{n+1} - 0 = \begin{cases} 2 & (n\,\text{が奇数}) \\ 0 & (n\,\text{が偶数}) \end{cases}
\end{aligned}$$

(3 次元) 多面体に対して，オイラーの多面体定理 ($a_0 = v,\ a_1 = e,\ a_2 = f$)

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2$$

が成立するように，4 次元多胞体に対して，

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$$

成立することがフランスの数学者アンリ・ポアンカレによって発見された．

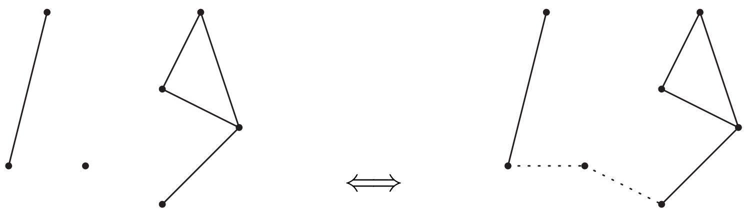
一般に，n 次元の単体的複体について

$$\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m a_m = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \begin{cases} 2 & (n\,\text{が奇数}) \\ 0 & (n\,\text{が偶数}) \end{cases}$$

をその図形のオイラー標数と呼び，この公式をシュレーフリの n 次元公式という．

奇数次元の多胞体の場合はオイラー標数は 2 で，偶数次元の多胞体の場合はオイラー標数は 0 である．

2 次元の平面図形のオイラー標数 $v - e$ に面の数を加えた $v - e + f$ は，連結成分の個数に等しいことが知られている (グラフ理論)．例えば左下のグラフについて，$v - e + f = 7 - 5 + 1 = 3$ となり，連結成分の個数に等しい．



$v - e + f = 3$ $\qquad\Longleftrightarrow\qquad$ $v - e + f = 1$

3 次元の多面体または閉曲面のオイラー標数 $v - e + f$ は，種数 g(genus) により，$2 - 2g$ となることはよく知られている．