熊大入試 (数学)　20 年の軌跡

玉名工業高等学校
教諭　西村　信一

1　はじめに

熊本大学の一般前期試験問題について，過去 20 年分の傾向を調べると，必ず出題された分野がある．文系は数学 II の積分，理系は数学 III の積分である．

文系については，放物線と直線で囲まれた部分の面積がほとんどあり，パターン化されたものが多い．

理系は，整関数，指数関数，対数関数，三角関数，合成関数，極方程式から出題されているが，指数関数，対数関数，三角関数からの出題がほとんどである．理系 (医学部医学科は 2009 年から独自問題) の出題は次のとおりである．

近年では指数関数・対数関数，三角関数のグラフについて，その面積や回転体の体積を求める問題が目立つ．

年度	理系・医学部　「積分」の出題内容 (数字は問題番号)
1997	整関数 (絶対値)・面積 (11)
1998	三角関数・面積 (9)
1999	円と放物線で囲まれた図形・面積 (3)
2000	三角関数・弧長 (4)
2001	指数関数・面積 (1)
2002	指数関数・定積分 (4)
2003	分数関数・定積分 (3)，三角関数 (積分方程式)・定積分 (4)
2004	極方程式・定積分 (4)
2005	極方程式・弧長 (4)
2006	整関数・定積分 (3)，合成関数・回転体の体積 (4)
2007	対数関数・面積 (3)
2008	三角関数・区分求積法 (4)
2009	整関数・定積分 (理 1)，三角関数・定積分 (理 4・医 4)
2010	指数関数・定積分 (理 3)，合成関数の定積分 (理 4・医 4)
2011	整関数 (関数列)・定積分 (理 3)，立体の体積 (医 4)
2012	三角関数・定積分 (理 4・医 3)
2013	三角関数・定積分 (理 3・医 3)
2014	指数関数・回転体の体積 (理 4)，三角関数・回転体の体積 (医 4)
2015	指数関数と三角関数の積・定積分 (理 4・医 4)
2016	対数関数・回転体の体積 (理 4・医 2)

入学試験の改定年度は 1997 年，2006 年，2015 年

2014 年 (理系) と 2016 年 (理系・医学) では y 軸の周りの回転体の体積を求める問題では，バウムクーヘン型の求積法を用いれば簡潔に求めることができた．今年度の試験では医学部受験生の 7 割がこの求積法を用いて解答したそうである．

また，部分積分法を用いて解答することが非常に多く，その計算の特徴を以下に述べる．

関数 $g_n(x)$ の原始関数を $g_{n+1}(x)$ (n は自然数)，$g_0(x) = g(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g_1(x) - \int f'(x)g_1(x)\,dx \\
&= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + \int f''(x)g_2(x)\,dx \\
&= f(x)g_1(x) - f'(x)g_2(x) + f''(x)g_3(x) - \int f^{(3)}(x)g_3(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f^{(k)}(x)g_{k+1}(x) + (-1)^n \int f^{(n)}(x)g_n(x)\,dx
\end{aligned}$$

$g(x) = e^{px}$ のとき (p は定数)，$g_n(x) = \dfrac{e^{px}}{p^n}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int e^{px}f(x)\,dx &= \frac{e^{px}}{p}f(x) - \frac{1}{p}\int e^{px}f'(x)\,dx \\
&= \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p}\right\} + \frac{1}{p^2}\int e^{px}f''(x)\,dx \\
&= \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2}\right\} - \frac{1}{p^3}\int e^{px}f^{(3)}(x)\,dx \\
&= \frac{e^{px}}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(-p)^k} + \frac{1}{(-p)^n}\int e^{px}f^{(n)}(x)\,dx \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

例えば，$f(x) = \sin qx$ のとき，$f'(x) = q\cos qx$，$f''(x) = -q^2\sin qx$ であるから，上の第 2 式から

$$\int e^{px}\sin qx\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left(\sin qx - \frac{q\cos qx}{p}\right) - \frac{q^2}{p^2}\int e^{px}\sin qx\,dx$$

よって $\displaystyle\int e^{px}\sin qx\,dx = \frac{e^{px}(p\sin qx - q\cos qx)}{p^2+q^2} + C$

また，$f(x)$ が整式であるとき，

$$\int e^{px}f(x)\,dx = \frac{e^{px}}{p}\left\{f(x) - \frac{f'(x)}{p} + \frac{f''(x)}{p^2} - \frac{f^{(3)}(x)}{p^3} + \cdots\right\} + C$$

2　過去問からの考察

平成 28 年 5 月 22 日 (日) に高校・大学入試連絡会で熊本大学の入試担当者から，バウムクーヘン型の求積法は高校の教科書に載っていないが，これを使ってもよいという回答があった．計算が簡単に済むので是非覚えておきたい．

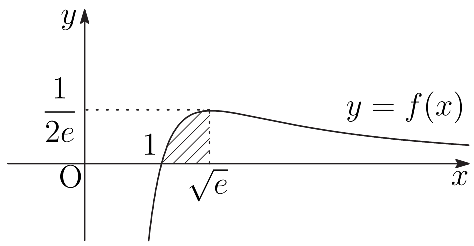
2.1　熊大 2016 年度入試から

関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x^2} \quad (x \geqq 1)$$

について，曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $y = 0$，$x = \sqrt{e}$ で囲まれた斜線部分の図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積．

(理系 4 番，医学部 2 番)



解答　求める体積を V とすると (教科書にある一般的な解答)

$$V = \pi(\sqrt{e})^2 \times \frac{1}{2e} - \pi\int_0^{\frac{1}{2e}} x^2\,dy$$

$$y = \frac{\log x}{x^2} \text{ から，} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2\log x}{x^3}$$

y	$0 \longrightarrow \frac{1}{2e}$
x	$1 \longrightarrow \sqrt{e}$

$$\int_0^{\frac{1}{2e}} x^2\,dy = \int_1^{\sqrt{e}} x^2\left(\frac{1-2\log x}{x^3}\right)dx = \int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x} - \frac{2\log x}{x}\right)dx$$

$$= \Big[\ \log x - (\log x)^2\ \Big]_1^{\sqrt{e}} = \frac{1}{4}$$

よって　　$V = \dfrac{\pi}{2} - \pi\cdot\dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

別解　求める立体の体積を V とすると (バウムクーヘン型求積法)

$$V = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}} x\cdot\frac{\log x}{x^2}\,dx = 2\pi\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)(\log x)'\,dx = \pi\Big[\ (\log x)^2\ \Big]_1^{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leqq x \leqq b$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

2.2　熊大 2015 年度入試から

問題の中で次の定積分を計算する箇所がある.

(1) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-rt}\sin t\,dt$ (医学部 4 番)

(2) $\displaystyle\int_0^\pi e^{-t}\sin t\,dt$ (理系 4 番)

解答 $(*)$ の第 2 式から

$$\int e^{-rt}f(t)\,dt = -\frac{e^{-rt}}{r}\left\{f(t)+\frac{f'(t)}{r}\right\}+\frac{1}{r^2}\int e^{-rt}f''(t)\,dt$$
$$\int e^{-t}f(t)\,dt = -e^{-t}\{f(t)+f'(t)\}+\int e^{-t}f''(t)\,dt$$

これらに $f(t)=\sin t$ を代入すると

$$\int e^{-rt}\sin t\,dt = -\frac{e^{-rt}}{r}\left(\sin t+\frac{\cos t}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\int e^{-rt}\sin t\,dt$$
$$\int e^{-t}\sin t\,dt = -e^{-t}(\sin t+\cos t)-\int e^{-t}\sin t\,dt$$

したがって，(1)，(2) は次のようになる

$$\int_0^\pi e^{-rt}\sin t\,dt = \left[-\frac{e^{-rt}}{r^2+1}(r\sin t+\cos t)\right]_0^\pi = \frac{e^{-r\pi}+1}{r^2+1}$$
$$\int_0^\pi e^{-t}\sin t\,dt = \left[-\frac{e^{-t}}{2}(\sin t+\cos t)\right]_0^\pi = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

別解

$$(e^{-rt}\sin t)' = e^{-rt}(-r\sin t+\cos t) \quad \cdots ①$$
$$(e^{-rt}\cos t)' = e^{-rt}(-\sin t-r\cos t) \quad \cdots ②$$

$① \times r + ②$ より　$\{e^{-rt}(r\sin t+\cos t)\}' = -(r^2+1)e^{-rt}\sin t$

したがって　$\displaystyle\int e^{-rt}\sin t\,dt = -\frac{e^{-rt}(r\sin t+\cos t)}{r^2+1}+C$

以下，同様.

2.3　熊大 2014 年度入試から

問題の中で次の定積分を計算する箇所がある．

- $y=e^{ax}$ について，$\pi\displaystyle\int_1^e x^2\,dy$　　(理系 4 番)

解答　$y=e^{ax}$ より，$\dfrac{dy}{dx}=ae^{ax}$

y	$1\longrightarrow e$
x	$0\longrightarrow \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\pi\int_1^e x^2\,dy &= \pi a\int_0^{\frac{1}{a}} x^2e^{ax}\,dx\\ &=\pi\left[e^{ax}\left\{x^2-\frac{(x^2)'}{a}+\frac{(x^2)''}{a^2}\right\}\right]_0^{\frac{1}{a}}\\ &=\pi\left[e^{ax}\left(x^2-\frac{2x}{a}+\frac{2}{a^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{a}}=\frac{\pi(e-2)}{a^2}\end{aligned}$$

解説　本題では，$x=\dfrac{\log y}{a}$ として，次のように計算してもよい．

$$\frac{\pi}{a^2}\int_1^e(\log y)^2\,dy=\frac{\pi}{a^2}\Big[y\{(\log y)^2-2\log y+2\}\Big]_1^e=\frac{\pi(e-2)}{a^2}$$

指数関数または対数関数のどちらで計算してもよいが，複雑な場合は指数関数の形に直し，$(*)$ を利用する方が簡単である．

関連　九州大学理学部数学科 2015 年一般後期 3 番[1]に次の計算箇所がある．

$$\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx$$

$t=3-\log_2(3-x)$ $(1\leqq x\leqq 2)$ とおくと

$$x=3-2^{3-t},\quad \frac{dx}{dt}=2^{3-t}\log 2$$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$2\longrightarrow 3$

$$\begin{aligned}\int_1^2\{3-\log_2(3-x)\}^2\,dx &=(\log 2)\int_2^3 t^2 2^{3-t}\,dt\\ &=\left[-2^{3-t}\left\{t^2+\frac{2t}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\right\}\right]_2^3\\ &=-1+\frac{2}{\log 2}+\frac{2}{(\log 2)^2}\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf

2.4　新課程への対応

2015 年度から新課程での入試に移行したが，理系・文系とも 2 年連続で「数列」からの出題があり，2015 年度の医学部の試験では「数列」から 2 題も出題された．その中で整数問題を扱う出題もあった．特に合同式を利用できるようになったことで，漸化式における処理が簡単になった．

2014 年文系 4 番

1 次関数 $f_n(x)=a_nx+b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ は以下の 2 つの条件を満たすとする．

(i) $f_1(x)=x$

(ii) $f_{n+1}(x)$ は整式 $P_n(x)=\displaystyle\int_1^x 6tf_n(t)\,dt$ を x^2+x で割った余りに等しい．
以下の問いに答えよ．

(1) $n \geqq 1$ のとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数であることを示せ．

(3) $n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではないことを示せ．

解答　(1) $f_n(x)=a_nx+b_n\ (n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\int_1^x 6tf_n(t)\,dt=\int_1^x 6t(a_nt+b_n)\,dt\\&=\int_1^x(6a_nt^2+6b_nt)\,dt=\Big[\,2a_nt^3+3b_nt^2\,\Big]_1^x\\&=2a_nx^3+3b_nx^2-2a_n-3b_n\end{aligned}$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割ることにより

$$P_n(x)=(x^2+x)\{2a_nx+(3b_n-2a_n)\}+(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$$

$P_n(x)$ を x^2+x で割った余り $(2a_n-3b_n)x-2a_n-3b_n$ が $a_{n+1}x+b_{n+1}$ に等しいので，同じ次数の係数を比較して

$$\boldsymbol{a_{n+1}=2a_n-3b_n,\qquad b_{n+1}=-2a_n-3b_n}$$

(2) $f_1(x)=x$ より　$a_1=1$，$b_1=0$
これと (1) の結果により，a_n と b_n は整数であるから

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=2a_n-3b_n\equiv b_n\pmod 2\\b_{n+1}&=-2a_n-3b_n\equiv b_n\pmod 2\end{aligned}$$

$b_1 = 0$，$b_{n+1} \equiv b_n \pmod 2$ より　$b_n \equiv 0 \pmod 2$

$a_{n+1} \equiv b_n \pmod 2$ より，$n \geqq 2$ のとき　$a_n \equiv 0 \pmod 2$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は偶数である．

(3) a_n と b_n は整数であるから

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n - 3b_n \equiv -a_n \pmod 3 \\ b_{n+1} &= -2a_n - 3b_n \equiv a_n \pmod 3 \end{aligned}$$

$a_1 = 1$，$a_{n+1} \equiv -a_n \pmod 3$ より　$a_n \equiv (-1)^{n-1} \pmod 3$

$b_{n+1} \equiv a_n \pmod 3$ より，$n \geqq 2$ のとき　$b_n \equiv (-1)^n \pmod 3$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$|a_n|$ と $|b_n|$ は 3 の倍数ではない．

1998 年文系 3 番

$a_1 = a_2 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ．

(1) $n = 3,\ 4,\ \cdots,\ 9$ に対して a_n の値を求めよ．

(2) n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり，n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ．

解答 (1) $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = \mathbf{2}$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = \mathbf{3}$

$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = \mathbf{5}$

$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = \mathbf{8}$

$a_7 = a_6 + a_5 = 8 + 5 = \mathbf{13}$

$a_8 = a_7 + a_6 = 13 + 8 = \mathbf{21}$

$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = \mathbf{34}$

(2) 条件から，a_1，a_2 は奇数．(1) の結果から，a_3 は偶数．

$n \geqq 4$ とすると，与えられた漸化式より

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

a_n は整数であるから　$a_n \equiv a_{n-3} \pmod 2$

よって，n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり，n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数である．

3　熊本大学　出題分野

2015 年度入試は，新課程での初年度の入学試験であったため，旧課程履修者への配慮からデータの分析 (数学 I)，整数の性質 (数学 A)，複素数平面 (数学 III) の分野からの出題はなかったが，2016 年度入試では，これらの出題があったことに注意したい．

3.1　理系 (一般前期)

2016 年度入試 (理系) では，整数の性質 (数学 A) と複素数平面 (数学 III) の新課程の分野からの出題があった．

熊本大学　理系		06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
数学 I	数と式							1				
	2 次関数											
	図形と計量											
	データの分析											
数学 A	場合の数と確率	1	2*		3		1					
	整数の性質											2
	図形の性質											
数学 II	式と証明											
	複素数と方程式											
	図形と方程式											
	三角関数					1						
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法		1	1							1	
数学 B	平面上のベクトル					2	2					
	空間のベクトル	2							2	1	2	1
	数列			2					1		3	2
	確率分布と統計											
数学 III	式と曲線						4					
	複素数平面											3
	関数											
	極限				2					3		
	微分法とその応用	3	4					3	3	2		4
	積分法	3		4	1,4	3,4	3	4	3		4	
	積分法の応用	4	3						4	4		4
旧課程	行列 (数学 C)		3	3				2				

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

3.2 医学部医学科 (一般前期)

医学部医学科は，2009 年度入試から独自問題となったが，理系との共通問題や理系の問題を応用したものが出題されるなど，完全に独立した問題ではない．積分法 (数学 II・III) が毎年出題されていることに加え，ベクトル (数学 B) の出題率の高さにも特徴がある．新課程の分野から複素数平面 (数学 III) が今年度出題されたことに注意したい．

熊本大学　医学部医学科		09	10	11	12	13	14	15	16
数学 I	数と式								
	2 次関数								
	図形と計量							1	
	データの分析								
数学 A	場合の数と確率	3	2		1	1			
	整数の性質			1					
	図形の性質								
数学 II	式と証明								
	複素数と方程式								
	図形と方程式					4			
	三角関数								
	指数関数と対数関数								
	微分法と積分法			4					
数学 B	平面上のベクトル								1
	空間のベクトル		1	2	4	2	1	2	
	数列	2	3					3,4	
	確率分布と統計								
数学 III	式と曲線			3					
	複素数平面								3
	関数								
	極限		4					4	
	微分法とその応用						2,3	1	2,4
	積分法	4	3,4		3	3		4	4
	積分法の応用						4		2
旧課程	行列 (数学 C)	1			2				

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

3.3　文系 (一般前期)

「微分法と積分法」(数学 II) からの出題が定着しており，数学 B の「数列」または「ベクトル」から必ず出題されている．今年度，新課程の分野「データの分析」(数学 I) と「場合の数と確率」(数学 A) の融合問題が出題された．また，今年度から出題された「整数の性質」(数学 A) についても，受験対策を立てておく必要がありそうだ．

熊本大学　文系		06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16
数学 I	数と式							1				
	2 次関数			1								
	図形と計量						1					1
	データの分析											2
数学 A	場合の数と確率	1	1*		2	3*						2
	整数の性質						2		1			3
	図形の性質											
数学 II	式と証明											
	複素数と方程式											
	図形と方程式											
	三角関数				3							
	指数関数と対数関数											
	微分法と積分法	3	3	3	1	1,2	3	3,4	2	2,3,4	1,4	4
数学 B	平面上のベクトル	4				4						
	空間のベクトル		2		4		4		3	1	2	
	数列	2	4	2,4				2	4		3	3
	確率分布と統計											

数字は問題番号 (∗ は旧課程の内容を含む)

4　おわりに

九州地区国立大学 (九大・九工大・福教大・佐大・長大・熊大・分大・宮大・鹿大・琉大) 全学部全学科の過去 16 年分 (2001-2016) の一般前期試験問題 (数学) を次のサイトに掲載しています (九大・熊大は過去 20 年分 (1997-2016))．

http://kumamoto.s12.xrea.com/ruihi.html

当サイトは，2014 年九州算数・数学教育研究 (熊本) 大会での研究報告の一環として作成したものです．掲載されている内容等についてお気付きの点がございましたら，ご連絡いただければありがたいです．

玉名工業高等学校　西村　信一
nisi0072@yahoo.co.jp