

『類比方式による大学入試問題集の作成に向けて』

熊本県立玉名工業高等学校 西村 信一

1 これまでの取り組み

平成12年にICT事業に必要なインフラが整備されたことにより、県立工業高校を中心に進路情報法の共有化に向けた取り組みが始まった。中でも熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会(工進連)が中心となり専用サイト(IDとパスワードを各学校ごとに発行)を立ち上げる。進路情報の電子文書化(PDF)および管理は、平成15年度まで同会の事務局であった球磨工業高校が担当する。その後、平成16～20年度に湧心館高校、平成21～23年度に熊本工業高校、平成24年度以降、玉名工業高校が担当している。なお、同事業の幹事校は、発当初(平成12年)から私の勤務校が担当している。

専用サイトに掲載している内容については、次のとおりである。

1. 大学・高専・専門学校の英語・数学・専門教科(工業)の過去問と解答
2. 工進連模試(英語・数学)
3. 就職試験問題(数学)、公務員試験過去問
4. 工業高校生用の英語・数学問題集

平成14年度高専編入合格者数(工業高校生)		
学 校 名	受験者	合格者
北九州工業高等専門学校	25	5(1)
有明工業高等専門学校	34	14(12)
佐世保工業高等専門学校	30	22(7)
熊本電波工業高等専門学校	14	3(3)
八代工業高等専門学校	50	10(10)
大分工業高等専門学校	15	5(2)
都城工業高等専門学校	20	4(1)
鹿児島工業高等専門学校	21	16(8)
合 計	209	79(44)

()内の数は熊本県立工業高校出身者

平成22年、熊本工業高校に勤務していたとき、進学指導を1年間担当することになった。熊本工業高校の生徒は部活動や資格取得に多くの時間を割かれていたので、効率的な学習指導を推進する必要があった。そのため、生徒用の専用サイトを立ち上げ、進学課外で用いる教材(解説付き)や入試問題の解答・解説を掲載した。

1. 数学は、使用している教科書(I・II・III・A・B・C)と解答・解説集を電子文書化(PDF)し、生徒自ら学習できる教材に作り上げた。
2. 英語は、センター試験対策に力を入れ、ハイパーリンク・ポップアップ辞書・音声再生機能を備えた高度なICT教材(PDF)を作成する。

熊本工業高校の主な進学者数					
	H21	H22	H23	H24	H25
熊本大学	1	4	3	2	1
熊本県立大学		3	4	2	4
九州工業大学		1			
佐賀大学			1	2	1
長崎大学				1	1
長崎県立大学					1
大分大学	1	3			1
宮崎大学	2	3		2	3
鹿児島大学	2	4	1	1	2
広島大学		1			
愛媛大学	1	2	1		
高知大学	1	1			
山口大学		1			
岡山大学	1				
大阪教育大学			1	1	
静岡大学	1				
千葉大学		1			
国立高専編入	11	15	10	10	10
合 計	21	39	21	21	24

平成 18 年，県教委から文部科学省が推進する ICT 活用に関する調査研究への参加・協力を委託される．ICT 活用の観点から，工進連のサイトにある就職試験問題集 (数学) および熊本県入試問題 (数学) を公開するとともに製本したものを県内高校に配布する．

平成 22 年，工進連のサイトにある熊本大学の過去問 (一般前期試験 10 年分) をまとめた

「入試の軌跡 熊本大学理系数学」

「入試の軌跡 熊本大学文系数学」

を作成する．また，要望があった

「入試の軌跡 九州大学理系数学」

「入試の軌跡 九州大学文系数学」

も作成し，これらをサイトに掲載する．

平成 24 年，九州大学および熊本大学の一般前期試験 12 年分をまとめた冊子を県内高校に配布する．

また，これらは ICT 教材 (PDF) としての利用を想定し，ハイパーリンクを施している．個人的には，プロジェクターとマグネットホワイトボードシートを使用している．

なお，利用者が必要な部分を PDF のスナップ・ショット機能を用いることにより，利用者が使用している文書ファイルに取り込むことも可能である．

2 これからの取り組み

ICT 事業への協力として九州大学および熊本大学の一般前期試験問題 (14 年分) を整理してきたが，これだけで類比方式による大学入試問題集を作成することはできない．そこで，九州地区の多くの高校生が志望する国立大学の試験問題 (2001 年度以降の一般前期試験問題) を整理することにした．

九州大学および熊本大学については，過去 14 年分の問題と解答を公開している．九州工業大学，福岡教育大学，佐賀大学，長崎大学，大分大学，宮崎大学，鹿児島大学，琉球大学の過去 14 年分の問題と答 (証明問題は証明を省略)，解答は過去 6 年分 (2009-2014) を公開している (2014 年 7 月時点)．これらのコンテンツは，以下に掲載している．

<http://www1.ocn.ne.jp/~oboetene/plan/>

3 終りに

上記のコンテンツは公開されたことにより，多くの先生方の目に触れることとなった．識者の達眼に晒されながら内容は鍛錬され，今後さらにその完成度を高めていくものと確信する．

「類比方式による大学入試問題集」は，すべての問題の解答をおえてからの作業であり，その完成は遥か彼方にある．しかし，多くの受験生のため，また次の世代の先生方のため，これを長期的な取り組みとしたい．

4 その他

今回の研究発表のため，2014 年 4 月 20 日 (日) に九州数学教育会が主催する算数・数学研修会『大学入試問題研究 (九州大学・熊本大学・鹿児島大学)』に初めて参加した．10:00～13:00 という限られた時間で 3 大学の一般前期試験問題を解説するという慌ただしい研修会だった．3 大学の問題の解説者の発表がすべて終わってから，参加者から 1 問だけ質問があった鹿児島大学の医学部の軌跡の問題について私から解説させてもらった．また，今年の難問とされた問題 (九大理系 5 番) についても，ロルの定理を用いたより簡単な別解を紹介させてもらった (時間があれば他の問題についても述べたかったが)．情報交換の場 (サイト) があれば，解答・解説の完成度は高まるのではないだろうか．

2014 年 5 月 25 日 (日) に九州数学教育会が主催する九州・山口地区『大学・高校 数学科入試連絡会』に今回の発表のため，初めて参加したところ，熊本大学の担当者 (理学部数学科教授) が拙者の解答 (熊本大学の一般前期文系・一般前期理系・一般前期医学部) を大型スクリーンに投影し，ネットに公開されているものであると前置きされ，解答の解説をされたときは本当に驚いた．同時に，出題者から拙者の解答・解説を認めて頂いたことに感激した．また，このときの連絡会も慌ただしく，十分に意見をやり取りをする時間がなかったのが残念であった．やはりゆっくり参加できる情報交換の場 (サイト) が必要だと感じた．

5 日本学術会議の提言から

最近「ビッグデータ・オープンデータ利活用」が社会のイノベーションに必須の要件であることがさかんに論じられ、閣議決定にも至っている。これに伴い、大量のデータからの知識発見の基盤としての統計科学の重要性も広く認識されるようになってきた。日本学術会議数理科学委員会数理統計学分科会が平成 26 年 (2014 年)8 月 20 日に高等学校向けに次の提言¹を行った。

平成 20 年の学習指導要領改訂により、算数・数学科における統計内容が約 30 年ぶりに拡充されたが、統計教育に関する諸外国の動向をみるとビッグデータ・オープンデータ利活用の社会的需要を背景に更に大きな展開がはかられており、我が国でも問題解決型の統計教育の更なる充実が必要である。とくに、次期指導要領改訂に際しては、文系志望・理系志望を問わず、すべての高校生に「統計」と「確率」を必ず履修させるよう配慮される必要がある。また米国 AP (Advanced Placement) Statistics の動きを参考にした高大連携の仕組みやアドミッションポリシーの確立が必要である。

6 近年の大学入試問題から

「統計」と「確率」の出題内容においては、以前より発展的な内容となっている。例えば、ランダムウォーク (Ruin problem) に関する問題が 2002 年の東京大学 (理系) 後期で出題され、その類題が 2014 年の九州工業大学 (情報工学部) 前期でも出題された。今年の九工大の問題が当時の東大の問題よりも難易度が高くなっている。九州大学でも 2002 年の前期試験 (理系・文系) でランダムウォーク (鏡像原理) に関する問題が出題されている。鹿児島大学では、2012 年にクーポンコレクタープロブレム (Coupon collector's problem) に因んだ問題が出題されている。

7 Coupon collector's problem

1 個買うごとに景品を 1 個もらえる商品がある。景品は全部で n 種類あり、それぞれ 1 から n までの番号がつけてある。また、1 から n までの数字が 1 つずつ記入された n 枚のカードがある。 n 枚のカードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり、購入した商品 1 個ごとに箱の中から 1 枚引いて数字を確認して景品と交換する。引いたカードは、そのつど箱に戻すものとする。もらえる景品の番号は、引いたカードの数字と同じ番号のものとする。このとき、全種類の景品がそろうまで購入する商品の個数の期待値 (平均) E_n はいくらか。

¹<http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/kohyo-22-t197-1.pdf>

7.1 $n = 2$ のとき

k 個購入したときに景品が 2 種類そろそろ確率を $P_2(k)$ とすると ($k \geq 2$)

$$P_2(k) = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

よって、求める商品の個数の期待値 E_2 は²

$$E_2 = \sum_{k=2}^{\infty} k P_2(k) = \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3 \quad (\text{個})$$

7.2 $n = 3$ のとき

k 個購入したときに景品が 3 種類そろそろ確率を $P_3(k)$ とすると ($k \geq 3$)

$$P_3(k) = \frac{3(2^{k-1} - 2)}{3^k} = \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}}$$

よって、求める商品の個数の期待値 E_3 は

$$\begin{aligned} E_3 &= \sum_{k=3}^{\infty} k P_3(k) = \sum_{k=3}^{\infty} k \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k \frac{2^{k-1} - 2}{3^{k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1 - 2 \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1 \right\} = \frac{11}{2} \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

7.3 自然数 n に対して

一般に、 E_n は次の式で与えられる。

$$E_n = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

証明は、次を参照。

<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima.2012.pdf>

² $|r| < 1$ のとき $\sum_{k=2}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2} - 1$

8 ランダムウォーク

8.1 東京大学(理系)2002年後期

ランダムウォークの応用として、ギャンブラーの破産問題と呼ばれているものを考える．あるギャンブラーの最初の所持金を2ドルとする．1回賭けを行うごとに、勝てば所持金が1ドル増え、負ければ1ドル失うものとする．所持金がなくなればギャンブラーは破産しそこで賭けは終わり、また、所持金が5ドルになれば賭けは終了する．1回の賭けで勝つ確率を $\frac{2}{3}$ ，負ける確率を $\frac{1}{3}$ としたとき、このギャンブラーが破産して終了する確率はいくらとなるかを考えてみよう．この問題を数直線上で考えると、数直線上の位置2からスタートし、0と5の間で+方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$ ，-方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0から5の間で+方向へ移動する確率が $\frac{2}{3}$ ，-方向へ移動する確率が $\frac{1}{3}$ のランダムウォークとなる．0または5に達したときに賭けは終了する．

さて、ランダムウォークでは、状態の変化は確率的に定まり、その確率は一定である．すなわち、ある状態にある場合、それ以降の過程は時刻や履歴によらず確率的に定まる．したがって、ギャンブラーの破産確率は、単にそのときの所持金の額で決まる．これを $r(i)$ ($i = 0, 1, \dots, 5$) としよう． $r(i)$ は所持金が i であるときに、破産して終了する確率である．

(1) $r(2)$ を $r(1)$, $r(3)$ で表せ．

(2) このような関係式を各状態について表し、それらを用いて最初の所持金が2ドルのギャンブラーが破産して終了する確率を求めよ．

解答 (1) $r(2) = \frac{2}{3}r(3) + \frac{1}{3}r(1)$

(2) (1) と同様に $r(1) = \frac{2}{3}r(2) + \frac{1}{3}r(0)$, $r(0) = 1$

$r(2) = x$ とおいて上式に代入すると $r(1) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

(1) の結果から、さらに

$$r(3) = \frac{3}{2}r(2) - \frac{1}{2}r(1) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$$

$$r(4) = \frac{3}{2}r(3) - \frac{1}{2}r(2) = \frac{3}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{5}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$r(5) = \frac{3}{2}r(4) - \frac{1}{2}r(3) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}x - \frac{1}{6}\right) = \frac{31}{24}x - \frac{7}{24}$$

$r(5) = 0$ であるから $x = \frac{7}{31}$ よって $r(2) = \frac{7}{31}$

8.2 九州工業大学 (情報工学科)2014 年前期

点 P は次の (i) , (ii) , (iii) の規則に従って数直線上を動く .

(i) 時刻 0 で , P は整数座標点 0 から 10 のいずれかの位置 i ($1 \leq i \leq 10$) にある .

(ii) 時刻 t ($t = 0, 1, 2, \dots$) に位置 i ($1 \leq i \leq 9$) にある P は , $t + 1$ には確率 p ($0 < p < \frac{1}{2}$) で位置 $i + 1$ に , 確率 $1 - p$ で位置 $i - 1$ に移動する .

(iii) 時刻 t に位置 0 または 10 にある P は , $t + 1$ にもその位置に留まる .

以下の問いに答えよ .

(1) P が時刻 0 で位置 2 にあるとき , 時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ .

(2) P が時刻 0 で位置 1 にあるとき , 時刻 3 で位置 0 にある確率を求めよ .

時刻 0 で位置 i にある P が , いずれかの時刻で位置 0 に到達する確率を q_i とする . ただし , $q_0 = 1$, $q_{10} = 0$ である . $1 \leq i \leq 9$ のとき , q_{i+1} , q_i , q_{i-1} の間には $q_i = pq_{i+1} + (1 - p)q_{i-1}$ の関係が成り立つ .

(3) $q_{i+1} - q_i = \boxed{(a)}(q_i - q_{i-1})$ である . 空欄の (a) に入る適切な数または式を求めよ .

(4) q_i を q_1 と p を用いて表せ .

(5) q_1 を求め , q_1 を p を用いて表せ .

解答 (1) 時刻と位置の変化は次のようになる .

時刻	0	1	2	3
位置	2	1	0	0

よって , 求める確率は $(1-p)^2 \cdot 1 = (1-p)^2$

(2) 時刻と位置の変化は次のようになる .

時刻	0	1	2	3
位置	1	0	0	0

または

時刻	0	1	2	3
位置	1	2	1	0

よって , 求める確率は

$$(1-p) \cdot 1^2 + p \cdot (1-p)^2 = (1-p)(1+p-p^2)$$

(3) $q_i = pq_{i+1} + (1-p)q_{i-1}$ より

$$pq_{i+1} - q_i + (1-p)q_{i-1} = 0$$

この確率漸化式の特性方程式は

$$pt^2 - t + 1 - p = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = 1, \frac{1-p}{p}$$

したがって , 次の 2 式が成り立つ .

$$q_{i+1} - \frac{1-p}{p}q_i = q_i - \frac{1-p}{p}q_{i-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{i+1} - q_i = \frac{1-p}{p}(q_i - q_{i-1}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

よって , 求める空欄 (a) は $\frac{1-p}{p}$

(4) $\alpha = \frac{1-p}{p}$ とおくと, ①, ② より

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha q_0, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - q_0)$$

$q_0 = 1$ をこれに代入すると

$$q_{i+1} - \alpha q_i = q_1 - \alpha, \quad q_{i+1} - q_i = \alpha^i (q_1 - 1)$$

上の 2 式の辺々を引いて

$$(\alpha - 1)q_i = q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)$$

ここで, $0 < p < \frac{1}{2}$ より

$$\alpha - 1 = \frac{1-p}{p} - 1 = \frac{1-2p}{p} > 0$$

したがって
$$q_i = \frac{q_1(\alpha^i - 1) - (\alpha^i - \alpha)}{\alpha - 1}$$

よって
$$q_i = \frac{p}{1-2p} \left[q_1 \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^i - 1 \right\} - \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^i - \frac{1-p}{p} \right\} \right]$$

(5) $q_{10} = 0$ を (4) の結果に代入すると

$$q_1 \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - 1 \right\} - \left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - \frac{1-p}{p} \right\} = 0$$

ゆえに
$$q_1 = \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - \frac{1-p}{p}}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - 1}$$

上式および (4) の結果から

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{(q_1 - 1)\alpha^i - q_1 + \alpha}{\alpha - 1} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \left(\frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} - 1 \right) \alpha^i - \frac{\alpha^{10} - \alpha}{\alpha^{10} - 1} + \alpha \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \left\{ \frac{(1 - \alpha)\alpha^i}{\alpha^{10} - 1} + \frac{\alpha^{10}(\alpha - 1)}{\alpha^{10} - 1} \right\} \\ &= \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1} = \frac{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - \left(\frac{1-p}{p} \right)^i}{\left(\frac{1-p}{p} \right)^{10} - 1} \end{aligned}$$

8.3 破産問題 (Ruin problem)

A は所持金 i 万円で ($1 \leq i \leq 9$) , 1 回のゲームで勝てば 1 万円だけ増え , 負ければ 1 万円だけ減るゲームに参加する . A は所持金が 10 万円 (目標金額) になるか , 所持金がなくなったときにゲームは終了する . 1 回のゲームで P が勝つ確率を p ($0 < p < \frac{1}{2}$) とし , A の所持金がなくなる確率を q_i とする . ある時点で , P の所持金が j 万円であるとき ($1 \leq j \leq 9$) , その次には , 確率 p で所持金 $j+1$ 万円 , 確率 $1-p$ で所持金 $j-1$ 万円の状態になるから , 次の確率漸化式が成り立つ .

$$q_j = pq_{j+1} + (1-p)q_{j-1} \quad (q_0 = 1, q_{10} = 0)$$

本題の結果から , $\alpha = \frac{1-p}{p}$ とおくと

$$q_i = \frac{\alpha^{10} - \alpha^i}{\alpha^{10} - 1}$$

したがって , このゲームの期待値 E_i は

$$E_i = 10^5(1 - q_i) = \frac{10^5(\alpha^i - 1)}{\alpha^{10} - 1}$$

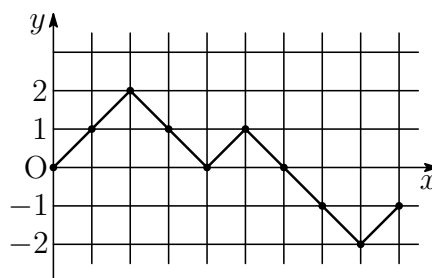
例えば , P の所持金が 5 万円のとき , 破産する確率 q_5 および期待値 E_5 は (E_5 の 1 円未満は切り捨て)

p	q_5	E_5
0.40	0.88364	11636
0.41	0.86055	13945
0.42	0.83395	16605
0.43	0.80365	19635
0.44	0.76956	23044
0.45	0.73172	26828
0.46	0.69035	30965
0.47	0.64583	35417
0.48	0.59874	40126
0.49	0.54985	45015

このような不利なゲーム ($0 < p < \frac{1}{2}$) に時間をかけて参加するより , 1 回勝負で 5 万円をかけることができるならば , 1 回勝負の期待値の方が大きい .

8.4 九州大学 2002 年 (文系・理系) 前期

平面上の点の x 座標と y 座標がどちらも整数であるとき、その点を格子点という。与えられた格子点を第 1 番目とし、この点から右斜め 45° 、または右斜め -45° の方向にもっとも近い第 2 番目の格子点を取り、この 2 点を線分で結ぶ。同様にして第 2 番目の格子点から第 3 番目の格子点を取り、第 2 番目と第 3 番目を線分で結ぶ。以下これを有限回繰り返し、こ



(折れ線グラフ)

うしてできる線分をつないだものを折れ線グラフということにする。右図に原点 O と格子点 $(9, -1)$ を結ぶ折れ線グラフの例を示す。次の問いに答えよ。

- (1) n は正の整数、 k は $0 \leq k \leq n$ なる整数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するための必要十分条件は $n + k$ が偶数であることを示せ。また、この必要十分条件がみたされているとき、原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数を求めよ。
- (2) n は 2 以上の整数、 k は $0 \leq k \leq n - 2$ なる整数で、 $n + k$ は偶数とする。原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n - 2, k)$ の少なくとも 1 つを通る折れ線グラフの数は、原点 O と格子点 $(n - 1, k + 1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の 2 倍に等しいことを示せ。
- (3) コインを 9 回投げる。1 回から i 回までの試行において、表の出た回数から裏の出た回数を引いた数を T_i で表す。このとき各格子点 $(i, T_i), i = 0, 1, 2, \dots, 9$, を順番に線分でつなげば折れ線グラフが得られる。ただし、 $T_0 = 0$ とする。 $T_9 = 3$ が起きたとき、どの $T_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ も 3 にならない条件つき確率を求めよ。

解答 (1) 原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフが存在するとき，右斜め 45° の方向に $\frac{n+k}{2}$ 回，右斜め -45° の方向に $\frac{n-k}{2}$ 回進む．

$$\frac{n-k}{2} = \frac{n+k}{2} - k$$

であるから， $\frac{n+k}{2}$ が整数であればよい．したがって $n+k$ は偶数である．

逆に $n+k$ が偶数，すなわち $n+k=2m$ をみたす整数 m が存在するとき，折れ線グラフは，右斜め 45° の方向に m 回，右斜め -45° の方向に $m-k$ 回 (または $n-m$ 回) 進む．

また，原点 O から格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_nC_{\frac{n+k}{2}}$

- (2) 原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで，最初に直線 $y=k$ と交わる格子点を $A(a, k)$ とする ($0 \leq a \leq n-2$)． A と格子点 $(n-1, k+1)$ を通る折れ線グラフの数， A と格子点 $(n-1, k-1)$ を通る数は，直線 $y=k$ に関する対称性によりその数は等しくともに N とおく．また，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも1つを通る数はそれらの和で

$$N + N = 2N$$

である．したがって，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフで，格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも1つを通る数は，原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を通る折れ線グラフの数の2倍に等しい．

- (3) 2つの事象 A, B を $A: T_9 = 3, B: \text{すべての } i(i=1, 2, \dots, 7) \text{ で } T_i \neq 3$ とすると

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = 1 - \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$$

原点 O と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数は，(1)の結果より ${}_9C_6$ (本)

したがって $P(A) = \frac{{}_9C_6}{2^9}$

原点 O と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフで，少なくとも $(1, 3), (2, 3), \dots, (7, 3)$ を通る数は，(2)の結果から， O と $(8, 4)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍であるから，(1)の結果より $2 \times {}_8C_6$ (本)

したがって $P(A \cap \overline{B}) = \frac{2 \times {}_8C_6}{2^9}$

よって $P_A(B) = 1 - \frac{2 \times {}_8C_6}{{}_9C_6} = 1 - \frac{2 \times 8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{3}$

補足

設問は，1次元ランダム・ウォーク (Random walk) [離散型] の最も基本的なモデルである．(3) の条件付き確率は，下の2つの表における原点と点 $(9, 3)$ を結ぶ折れ線グラフの数から

$$\frac{28}{84} = \frac{1}{3}$$

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	9										1
	8									1	
	7								1		9
	6							1		8	
	5						1		7		36
	4					1		6		28	
	3				1		5		21		84
	2			1		4		15		56	
	1		1		3		10		35		126
	0	1		2		6		20		70	
	-1		1		3		10		35		126
	-2			1		4		15		56	
	-3				1		5		21		84
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

折れ線グラフの数

		n									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	3										28
	2			1		3		9		28	
	1		1		3		9		28		90
	0	1		2		6		19		62	
	-1		1		3		10		34		117
	-2			1		4		15		55	
	-3				1		5		21		83
	-4					1		6		28	
	-5						1		7		36
	-6							1		8	
	-7								1		9
	-8									1	
	-9										1

すべての $i (i = 1, 2, \dots, 7)$ で $T_i \neq 3$ の数

(1) の結果から，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの数は ${}_nC_{\frac{n+k}{2}}$ である．また，(2) の結果から，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフであって格子点 $(0, k), (1, k), \dots, (n-2, k)$ の少なくとも1つを通る折れ線グラフの数は，原点 O と格子点 $(n-1, k+1)$ を結ぶ折れ線グラフの数の2倍に等しいから， n のときはじめて k になるグラフの数は

$${}_nC_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times {}_{n-1}C_{\frac{n+k}{2}} = {}_nC_{\frac{n+k}{2}} - 2 \times \frac{n-k}{2n} \cdot {}_nC_{\frac{n+k}{2}} = \frac{k}{n} \times {}_nC_{\frac{n+k}{2}}$$

これは，原点 O と格子点 (n, k) を結ぶ折れ線グラフの本数の $\frac{k}{n}$ 倍．

よって，求める条件付き確率は $\frac{k}{n}$

9 頻出問題

9.1 大分大学 (医学部)2014 年前期

数列の和について次の一連の問いに答えなさい．

(1) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ を示しなさい．

(2) 多項式 $(k+1)^3 - k^3$ の展開を利用して $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を示しなさい．

(3) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ を示しなさい．

(4) $\sum_{k=1}^n k^4$ を求めなさい．結果は因数分解すること．

9.2 宮崎大学 (教育文化学部)2013 年後期

自然数 n について， $S_n = \sum_{k=1}^n k$ $T_n = \sum_{k=1}^n k^2$ とおく．このとき，次の各問に答えよ．

(1) すべての実数 x, y について，等式

$$T_{n+1}(xS_{n+1} + y) - T_n(xS_n + y) = (T_{n+1} - T_n)(xS_{n+1} + y) + xT_n(S_{n+1} - S_n)$$

が成り立つ．これに注意して，すべての自然数 n に対して，

$$T_{n+1}(aS_{n+1} + b) - T_n(aS_n + b) = (n+1)^4$$

を満たすような定数 a, b を求めよ．

(2) $\sum_{k=1}^n k^4$ を， n を用いて表せ，

答 (1) $a = \frac{6}{5}, b = -\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

9.3 九州大学 (文系)2010 年前期

以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

- (1) 和 $1 + 2 + \cdots + n$ を n の多項式で表せ。
- (2) 和 $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ を n の多項式で表せ。
- (3) 和 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ を n の多項式で表せ。

9.4 連続する自然数のべき乗和

ファウルハーバー (Faulhaber) の定理

0 以上の整数 i に対して， $S_i(n) = \sum_{k=1}^n k^i$ とすると，次式が成立する．

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i+1}{j} B_j n^{i+1-j} \quad \cdots (*)$$

ただし
$$B_j = \sum_{p=0}^j \frac{(-1)^p p!}{p+1} \left\{ \begin{matrix} j \\ p \end{matrix} \right\} = \sum_{p=0}^j \frac{1}{p+1} \sum_{q=0}^p (-1)^q \binom{p}{q} q^j$$

なお， B_j はベルヌーイ数， $\left\{ \begin{matrix} j \\ p \end{matrix} \right\}$ は第 2 種スターリング数， $\binom{p}{q}$ は 2 項係数．

証明は <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita.2014.pdf> を参照．

とくに第 2 種スターリング数を Coupon collector's problem の関係式から導き，独自の証明を与えた．

9.5 計算例

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \cdots \text{より}$$

$S_i(n)$ の n^{i+1} (最高次) の係数は $\frac{1}{i+1}$ ， n^i の係数は $\frac{1}{2}$ ．例えば，

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{5} \sum_{j=0}^4 (-1)^j \binom{5}{j} B_j n^{5-j} = \frac{1}{5} (B_0 n^5 - 5B_1 n^4 + 10B_2 n^3 - 10B_3 n^2 + 5B_4 n) \\ &= \frac{1}{5} \left(n^5 + \frac{5}{2} n^4 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{1}{6} n \right) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \end{aligned}$$