

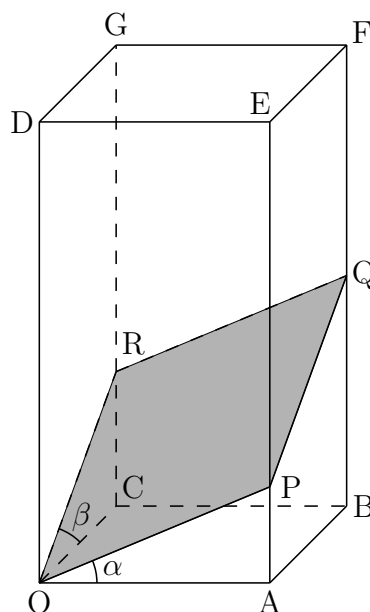
平成 26 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC-DEFG を考える. 3 点 P, Q, R を, それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に, 4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる. 四角形 OPQR の面積を S とおく. また, $\angle AOP$ を α , $\angle COR$ を β とおく.

(1) S を $\tan \alpha$ と $\tan \beta$ を用いて表せ.

(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $S = \frac{7}{6}$ であるとき, $\tan \alpha + \tan \beta$ の値を求めよ. さらに, $\alpha \leq \beta$ のとき, $\tan \alpha$ の値を求めよ.



2 a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする.

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して, 次の操作 $(*)$ を考える.

$(*)$ 袋 U から球を 1 個取り出し,

(i) 取り出した球が白球のときは, 袋 U の中身が白球 a 個, 赤球 1 個となるようにする.

(ii) 取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする.

はじめに袋 U の中に, 白球が $a + 2$ 個, 赤球が 1 個入っているとする. この袋 U に対して操作 $(*)$ を繰り返し行う.

たとえば, 1 回目の操作で白球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個, 赤球 1 個となり, さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個のみとなる.

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする. ただし, 袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする.

(1) p_1, p_2 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ.

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n$ を求めよ.

3 u を実数とする．座標平面上の2つの放物線

$$C_1: y = -x^2 + 1$$

$$C_2: y = (x - u)^2 + u$$

を考える． C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により， $a \leq u \leq b$ と表される．

(1) a, b の値を求めよ．

(2) u が $a \leq u \leq b$ をみたすとき， C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とする．ただし，共有点が1点のみのときは， P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする．

$$2|x_1y_2 - x_2y_1|$$

を u の式で表せ．

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする．定積分

$$I = \int_a^b f(u) du$$

を求めよ．

4 p, q は実数の定数で， $0 < p < 1$, $q > 0$ をみたすとする．関数

$$f(x) = (1 - p)x + (1 - x)(1 - e^{-qx})$$

を考える．

以下の問いに答えよ．必要であれば，不等式 $1 + x \leq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1) $0 < x < 1$ のとき， $0 < f(x) < 1$ であることを示せ．

(2) x_0 は $0 < x_0 < 1$ をみたす実数とする．数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を，

$$x_n = f(x_{n-1})$$

によって順次定める． $p > q$ であるとき，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

となることを示せ．

(3) $p < q$ であるとき，

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ．

5 r を 0 以上の整数とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また、素数 p を 1 つとり、 a_n を p で割った余りを b_n とする. ただし、0 を p で割った余りは 0 とする.

- (1) 自然数 n に対し、 b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ.
- (2) $r = 2$, $p = 17$ の場合に、10 以下のすべての自然数 n に対して、 b_n を求めよ.
- (3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して、

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする. このとき、 $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ.

- (4) $a_2, a_3, a_4, \dots$ に p で割り切れる数が現れないとする. このとき、 a_1 も p で割り切れないことを示せ.

6 座標平面の原点を O で表す.

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と、線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-2 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が、線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く. このとき、線分 PQ の通過する領域を D とする.

- (1) s を $0 \leq s \leq 2$ をみたす実数とするとき、点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ.
- (2) D を図示せよ.

解答例

- 1** (1) 座標空間において、O を原点とし、 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $P(1, 0, \tan \alpha)$, $R(0, 1, \tan \beta)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = (1, 1, \tan \alpha + \tan \beta)$$

であるから、このベクトルの x 成分と y 成分に注意すると

$$Q(1, 1, \tan \alpha + \tan \beta)$$

四角形 OPQR は、平行四辺形であるから

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OR}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OR})^2} \\ &= \sqrt{(1 + \tan^2 \alpha)(1 + \tan^2 \beta) - (\tan \alpha \tan \beta)^2} \\ &= \sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} \end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{OP} = (1, 0, \tan \alpha)$ と $\overrightarrow{OR} = (0, 1, \tan \beta)$ の外積 (ベクトル積) を $\vec{v}$ とすると (p.7 を参照)

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR} = (-\tan \alpha, -\tan \beta, 1)$$

平面 OABC の法線ベクトルを $\vec{n} = (0, 0, 1)$ とする.

$\vec{v}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + 1}}$$

正方形 OABC の面積が 1 であるから、求める面積を S とすると

$$S \cos \theta = 1 \quad \text{よって} \quad S = \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta + 1}$$

(2) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ より, $\tan(\alpha + \beta) = 1$ であるから

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \tan \alpha \tan \beta = 1 - \tan \alpha - \tan \beta \quad \cdots \textcircled{1}$$

$S = \frac{7}{6}$ より, (1) の結果から

$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta} = \frac{7}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = \frac{13}{36} \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を $\tan^2 \alpha + \tan^2 \beta = (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 2 \tan \alpha \tan \beta$ に代入すると

$$\frac{13}{36} = (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 2(1 - \tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\text{したがって} \quad (\tan \alpha + \tan \beta + 1)^2 = \frac{121}{36}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta > 0 \text{ であるから} \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6}$$

$$\text{これを ① に代入して} \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6}$$

上の 2 式から, $\tan \alpha, \tan \beta$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$$

$$0 < \alpha \leq \beta \leq \frac{\pi}{4} \text{ であるから} \quad \tan \alpha \leq \tan \beta \text{ より} \quad \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

別解 ① より, $1 - \tan \alpha \tan \beta = \tan \alpha + \tan \beta$ の両辺を平方すると

$$(1 - \tan \alpha \tan \beta)^2 = (\tan \alpha + \tan \beta)^2$$

$$\text{整理すると} \quad \tan^2 \alpha \tan^2 \beta - 4 \tan \alpha \tan \beta + 1 = \tan^2 \alpha + \tan^2 \beta$$

上式に ② を代入して, 整理すると

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha \tan^2 \beta - 4 \tan \alpha \tan \beta + \frac{23}{36} &= 0 \\ \left(\tan \alpha \tan \beta - \frac{1}{6} \right) \left(\tan \alpha \tan \beta - \frac{23}{6} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \text{ より, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \text{ であるから} \quad 0 < \tan \alpha \tan \beta < 1$$

$$\text{したがって} \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{6} \quad \textcircled{1} \text{ より} \quad \tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{6} \quad \text{以下同様}$$

外積 (ベクトル積)

2つのベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ が平行でないとき, ベクトル

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

は, $\vec{a}$ および $\vec{b}$ に直交する. このベクトルを, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積 (ベクトル積) と言い, $\vec{a} \times \vec{b}$ で表し (内積をスカラー積とも言う), その成分は

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

であるから, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ が成り立つ. また, その大きさについて

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \end{aligned}$$

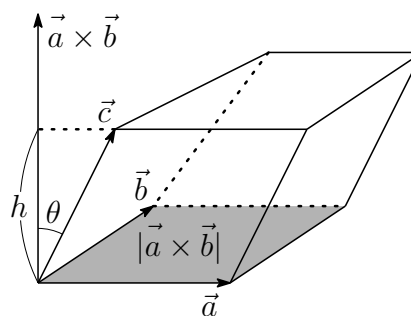
であるから, $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい.

$\vec{a} \times \vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \theta$$

絶対値をとると

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| |\cos \theta|$$



$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の張る平行六面体について, $\vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平面を底面とすると, $|\vec{c}| \cos \theta$ は, その高さ h であるから, この平行六面体の体積 V_1 は

$$V_1 = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とすると, 四面体 OABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

また, 対称性により, 次式が成立する.

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}| = |(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}|$$



- 2** (1) 1 回目の袋 U の中には白球が $a+2$ 個, 赤球が 1 個入っているから

$$p_1 = \frac{1}{(a+2)+1} = \frac{1}{a+3}$$

1 回目に赤球が出ると, 2 回目に球を取り出すとき, 袋 U の中には赤球はない. 1 回目に白球が出て, 2 回目 (袋 U の中に白球 a 個, 赤球が 1 個) に赤球が出る確率であるから

$$p_2 = (1-p_1) \times \frac{1}{a+1} = \left(1 - \frac{1}{a+3}\right) \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

- (2) (i) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で赤球が出たとき (確率 p_n), $n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に赤球は 0 個) で赤球が出る確率は 0
(ii) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で白球が出たとき (確率 $1-p_n$), $n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に白球 a 個, 赤球 1 個) で赤球が出る確率は

$$(1-p_n) \times \frac{1}{a+1}$$

(i), (ii) より
$$p_{n+1} = 0 + (1-p_n) \times \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$$

したがって
$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

よって, $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{a+2} &= \left(p_1 - \frac{1}{a+2} \right) \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \\ p_n &= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から, $r = -\frac{1}{a+1}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n &= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m(a+2)(a+3)} \sum_{n=1}^m r^{n-1} \\ &= \frac{1}{a+2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(a+2)(a+3)} \cdot \frac{1-r^{m-1}}{1-r} \end{aligned}$$

$|r| < 1$ であるから, $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$, $\lim_{m \rightarrow \infty} r^{m-1} = 0$ より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^m p_n = \frac{1}{a+2}$$

■

3 (1) $C_1: y = -x^2 + 1, C_2: y = (x - u)^2 + u$

C_1 と C_2 から y を消去すると, x に関する 2 次方程式

$$-x^2 + 1 = (x - u)^2 + u \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

を得る. $(*)$ が実数解をもつから, 係数について

$$D/4 = (-u)^2 - 2(u^2 + u - 1) = -u^2 - 2u + 2 \geq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad u^2 + 2u - 2 \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -1 - \sqrt{3} \leq u \leq -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{a = -1 - \sqrt{3}, b = -1 + \sqrt{3}}$$

(2) x_1, x_2 は 2 次方程式 $(*)$ の解であるから, 解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = u, \quad x_1 x_2 = \frac{u^2 + u - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad 2|x_1 y_2 - x_2 y_1| &= 2|x_1(-x_2^2 + 1) - x_2(-x_1^2 + 1)| \\ &= 2|x_1 x_2 + 1||x_1 - x_2| \\ &= 2 \left| \frac{u^2 + u - 1}{2} + 1 \right| \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= (u^2 + u + 1) \sqrt{u^2 - 2(u^2 + u - 1)} \\ &= \mathbf{(u^2 + u + 1) \sqrt{-u^2 - 2u + 2}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $f(u) = (u^2 + u + 1) \sqrt{-u^2 - 2u + 2}$

$$I = \int_a^b f(u) du = \int_a^b \{(u + 1)^2 - (u + 1) + 1\} \sqrt{3 - (u + 1)^2} du$$

$$u + 1 = \sqrt{3} \sin \theta \text{ とおくと} \quad \frac{du}{d\theta} = \sqrt{3} \cos \theta \quad \begin{array}{c|c|c} u & a & \rightarrow b \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \theta - \sqrt{3} \sin \theta + 1) \cdot 3 \cos^2 \theta d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{3}{8} (1 - \cos 4\theta) + \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) \right\} d\theta \\ &= 6 \left[\frac{3}{8} \left(\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) + \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{21}{8} \pi} \end{aligned}$$

ウォリス (Wallis) の積分

m を 0 以上の整数とする. 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta$$

を $\theta = \frac{\pi}{2} - u$ とおくと $\frac{d\theta}{du} = -1$

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^m \left(\frac{\pi}{2} - u \right) (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m u \, du$$

ウォリス積分は次式で定義される (m は 0 以上の整数).

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \theta \, d\theta$$

部分積分法により

$$\begin{aligned} I_{m+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+2} \theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)' \cos^{m+1} \theta \, d\theta \\ &= \left[\sin \theta \cos^{m+1} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^m \theta \, d\theta \\ &= (m+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^m \theta \, d\theta \\ &= (m+1)(I_m - I_{m+2}) \end{aligned}$$

したがって, 漸化式 $I_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} I_m$ を得る. これから

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{3}{16} \pi$$

本題の途中計算から

$$\begin{aligned} \frac{I}{6} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos^2 \theta - 3 \cos^4 \theta) \, d\theta \\ &= 4I_2 - 3I_4 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 3 \cdot \frac{3}{16} \pi = \frac{7}{16} \pi \end{aligned}$$

よって $I = \frac{21}{8} \pi$

n を自然数とすると

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}} &= \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^n \frac{2k(2k-1)}{(2k)^2} \\ \frac{I_{2n}}{I_0} &= \prod_{k=1}^n \frac{2k(2k-1)}{2^2 k^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n}}\end{aligned}$$

上式は, $n=0$ のときも成立する. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2}$ より

$$I_{2n} = \frac{{}_{2n}C_n}{2^{2n+1}} \pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

n を自然数とすると

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} &= \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k+1) \cdot 2k} \\ \frac{I_{2n+1}}{I_1} &= \prod_{k=1}^n \frac{2^2 k^2}{(2k+1) \cdot 2k} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \cdot {}_{2n}C_n}\end{aligned}$$

上式は, $n=0$ のときも成立する. $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 1$ より

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1) \cdot {}_{2n}C_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

発展

積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が成り立つ¹. これに $m = n = \frac{1}{2}$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ を代入すると

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!} \cdot 2^2$$

左辺は、中心を原点とする半径 1 の円の x 軸の上側にある半円の面積であるから

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(\frac{1}{2}!\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

さらに, $\frac{3}{2}! = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}! = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, $\frac{5}{2}! = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}! = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, $\dots$ となる.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(u) du = \int_a^b \{-(-u^2 - 2u + 2) - (u + 1) + 4\} \sqrt{-u^2 - 2u + 2} du \\ &= - \int_a^b (u - a)^{\frac{3}{2}} (b - u)^{\frac{3}{2}} du + \frac{1}{3} \left[(-u^2 - 2u + 2)^{\frac{3}{2}} \right]_a^b \\ &\quad + 4 \int_a^b (u - a)^{\frac{1}{2}} (b - u)^{\frac{1}{2}} du \\ &= - \frac{\left(\frac{3}{2}!\right)^2}{4!} (2\sqrt{3})^4 + 0 + 4 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!} (2\sqrt{3})^2 \\ &= -6 \left(\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\right)^2 + 24 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \frac{21}{8}\pi \end{aligned}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf の [1] を参照.

4 (1) $0 < p < 1$, $q > 0$ より, $0 < x < 1$ のとき

$$0 < (1-p)x, \quad 0 < 1-x < 1, \quad 0 < 1-e^{-qx} < 1$$

$$\text{ゆえに} \quad 0 < (1-p)x < (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx}),$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx}) &< (1-p)x + (1-x) \cdot 1 \\ &= 1 - px < 1 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad 0 < x < 1 \text{ のとき} \quad 0 < f(x) < 1$$

(2) (1) の結果から, $0 < x_{k-1} < 1$ のとき

$$0 < f(x_{k-1}) < 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x_k < 1$$

$$0 < x_0 < 1 \text{ であるから} \quad 0 < x_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{また, } 1 + (-qx_n) \leq e^{-qx_n} \text{ であるから, } 1 - e^{-qx_n} \leq qx_n \text{ より}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} = f(x_n) &= (1-p)x_n + (1-x_n)(1-e^{-qx_n}) \\ &< (1-p)x_n + 1 \cdot qx_n = (1-p+q)x_n \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 0 < x_n < (1-p+q)^n x_0$$

$$0 < q < p < 1 \text{ より, } 0 < 1-p < 1-p+q < 1 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p+q)^n = 0$$

$$\text{はさみうちの原理により} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

補足 平均値の定理により

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = f'(c_n), \quad 0 < c_n < x_n$$

をみたす c_n が存在する.

$f''(x) < 0$ ($0 < x < 1$) より (次頁参照), $f'(x)$ は単調減少.

また, $x_{n+1} = f(x_n)$, $f(0) = 0$ であるから

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = f'(c_n) < f'(0) = 1 - p + q$$

$$\text{したがって} \quad x_{n+1} < (1-p+q)x_n$$

(3) $f(x) = (1-p)x + (1-x)(1-e^{-qx})$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-p-(1-e^{-qx})+q(1-x)e^{-qx} \\ &= -p+e^{-qx}+q(1-x)e^{-qx}, \\ f''(x) &= -qe^{-qx}-qe^{-qx}-q^2(1-x)e^{-qx} \\ &= -q\{2+q(1-x)\}e^{-qx} < 0 \quad (0 < x < 1) \end{aligned}$$

ゆえに $f'(0) = 1-p+q > 1$, $f'(1) = -p+e^{-q} < 1$

$f'(x)$ は, $0 < x < 1$ で単調減少であるから

$$f'(\alpha) = 1, \quad (0 < \alpha < 1)$$

をみたす α が唯一存在する.

$$g(x) = \int_0^\alpha \{f'(t) - 1\} dt + \int_\alpha^x \{f'(t) - 1\} dt$$

とおくと $g(\alpha) > 0$, $g(1) = f(1) - f(0) - 1 = (1-p) - 0 - 1 = -p < 0$

中間値の定理により, $g(c) = 0$ をみたす $\alpha < c < 1$ が存在するから

$$\begin{aligned} g(c) &= \int_0^c \{f'(t) - 1\} dt = \left[f(t) - t \right]_0^c \\ &= f(c) - f(0) - c = f(c) - c = 0 \end{aligned}$$

よって, $c = f(c)$, $0 < c < 1$ をみたす実数 c が存在する.

補足 $g'(x) = f'(x) - 1$ であるから, $\alpha < x < 1$ において

$$g'(x) < 0$$

したがって, $\alpha < x < 1$ において, $g'(x)$ は単調減少.

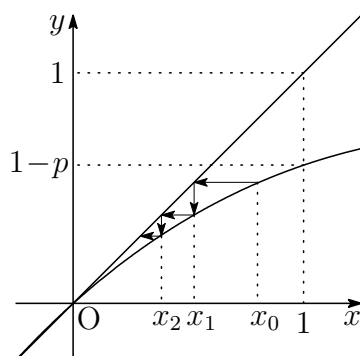
よって, $g(c) = 0$, すなわち

$$f(c) = c, \quad \alpha < c < 1$$

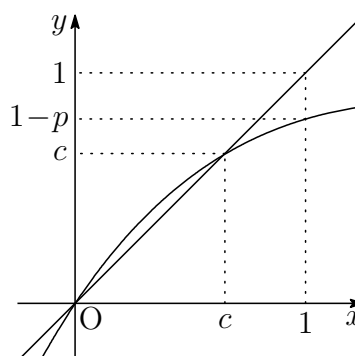
をみたす c はただ一つ存在する.

解説 $f'(x)$ は $0 < x < 1$ で単調減少, $f'(0) = 1-p+q > 0$, $f'(1) = -p+e^{-q} < 1$ であるから, $y = f(x)$ と $y = x$ のグラフは, (2) $p > q$, (3) $p < q$ のとき, 次のようになる.

$p > q$ のとき



$p < q$ のとき



$p < q$ のとき, $C(c, c)$, $P_n(x_n, f(x_n))$ とし, 直線 CP_n の傾きから

$$0 < \frac{f(x_n) - c}{x_n - c} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \frac{x_{n+1} - c}{x_n - c} < 1$$

$$\text{ゆえに} \quad 0 < x_0 < c \text{ のとき} \quad 0 < x_n < x_{n+1} < c \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$c < x_0 < 1 \text{ のとき} \quad c < x_{n+1} < x_n < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① から, 上に有界な単調増加列 $\{x_n\}$ は収束し, ② から, 下に有界な単調減少列 $\{x_n\}$ は収束する. $\frac{x_{n+1} - c}{x_n - c}$ の上限を m とすると²

$$0 < \prod_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - c}{x_k - c} < m^n \quad \text{すなわち} \quad 0 < \frac{x_n - c}{x_0 - c} < m^n$$

$$0 < m < 1 \text{ であるから} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m^n = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \quad \blacksquare$$

5 (1) a_n を素数 p で割った余りが b_n であるから

$$a_{n+2} \equiv b_{n+2}, \quad a_{n+1} \equiv b_{n+1}, \quad a_n \equiv b_n \pmod{p}$$

$$\text{また, } a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \text{ であるから } b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{p}$$

よって, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致する.

² 上限 m は, $0 < x_0 < c$ のとき $m = \frac{x_1 - c}{x_0 - c}$, $c < x_0 < 1$ のとき $m = f'(c)$

(2) $r = 2$ のとき, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ であるから, (1) の結果を用いると

$$b_1 \equiv 2, \quad b_2 \equiv 3, \quad b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{17}$$

したがって, 法 17 について

$$b_3 \equiv b_2(b_1 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_4 \equiv b_3(b_2 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_5 \equiv b_4(b_3 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_6 \equiv b_5(b_4 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_7 \equiv b_6(b_5 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_8 \equiv b_7(b_6 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_9 \equiv b_8(b_7 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_{10} \equiv b_9(b_8 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$\text{よって} \quad \begin{aligned} b_1 &= 2, & b_2 &= 3, & b_3 &= 9, & b_4 &= 2, & b_5 &= 3, \\ b_6 &= 9, & b_7 &= 2, & b_8 &= 3, & b_9 &= 9, & b_{10} &= 2 \end{aligned}$$

(3) (1) の結果を用いると

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1), \quad b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$b_{n+2} = b_{m+2} \text{ より } b_{n+1}(b_n + 1) \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$q = b_{n+1} = b_{m+1} \text{ とおくと } (q > 0)$$

$$q(b_n + 1) \equiv q(b_m + 1) \quad \text{ゆえに} \quad q(b_n - b_m) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$q \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ であるから } b_n - b_m \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad b_n \equiv b_m \pmod{p}$$

よって, $b_n = b_m$ が成り立つ.

(4) 仮定より, $b_2, b_3, b_4, \dots$ はすべて 0 ではない (1 から $p-1$ のいずれか).

したがって, 2 以上の相異なる自然数 n, m を用いた連続する 2 項のペア (b_n, b_{n+1}) のバリエーションは, 確かに高々 $(p-1)^2$ 通り.

鳩ノ巣原理より, $2 \leq n < m \leq (p-1)^2 + 2$ の範囲で, $b_n = b_m$ かつ $b_{n+1} = b_{m+1}$ となる相異なる組が必ず存在する.

ここで, (3) の結果 ($b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ かつ $b_{n+2} = b_{m+2} \implies b_n = b_m$) を利用すると, 一歩手前の項のペアについても $b_{n-1} = b_{m-1}$ が成り立ち, これを n が 2 になるまで逆向きに (過去へ向かって) 順に適用できる. その結果, 最終的に $b_1 = b_{m-n+1}$ が導かれる.

$m > n$ より $m - n + 1 \geq 2$ であり, 2 以上のインデックスの項はすべて 0 ではない (仮定より) ため, $b_{m-n+1} \neq 0$. よって, $b_1 \neq 0$ となり, a_1 は p で割り切れない. ■

- 6 (1) $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leq p \leq 2, -2 \leq q \leq 0)$,

$$OP = 2p, \quad OQ = -2q$$

$$OP + OQ = 6 \text{ であるから } 2p + (-2q) = 6 \text{ ゆえに } q = p - 3$$

したがって $0 \leq p \leq 2$, $-2 \leq p - 3 \leq 0$ すなわち $1 \leq p \leq 2$
 2点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

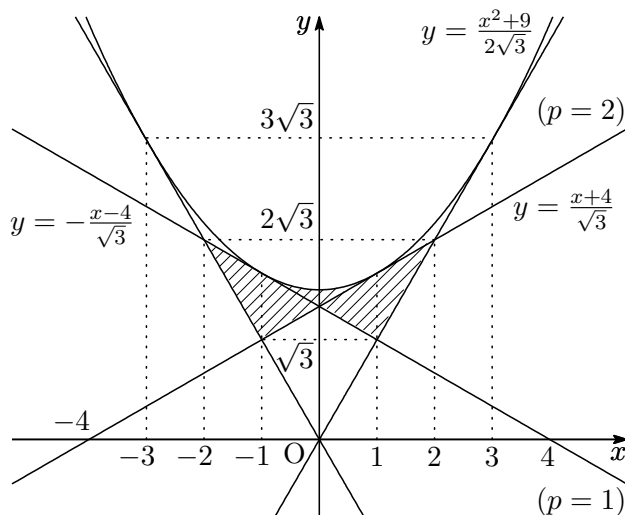
$$\text{すなわち } y = \frac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 ① の x を固定し, y が極値をとる点では, $\frac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \text{ ゆえに } x = 2p - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } p \text{ を消去すると } y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} \quad \dots (*)$$

D は, $1 \leq p \leq 2$ のとき, 2点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ (直線 ①) が通過する領域であるから, $(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると, その領域は, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, $0 \leq s \leq 2$ をみたす点 (s, t) が D にあるとき

$$0 \leq s \leq 1 \text{ のとき } -\frac{s-4}{\sqrt{3}} \leq t \leq \frac{s^2+9}{2\sqrt{3}}$$

$$1 \leq s \leq 2 \text{ のとき } \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}}$$

- (2) 領域 D は (1) で示した領域. ■