

平成24年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分  
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

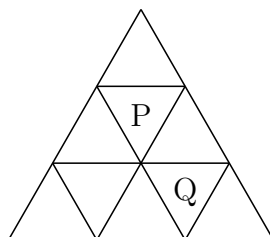
問題 1 2 3 4 5 6

1 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域  $D$  を考える.

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線  $\ell$  は原点を通り,  $D$  との共通部分が線分となるものとする. その線分の長さ  $L$  の最大値を求めよ. また,  $L$  が最大値をとるとき,  $x$  軸と  $\ell$  のなす角  $\theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) の余弦  $\cos \theta$  を求めよ.

2 図のように, 正三角形を9つの部屋に辺で区切り, 部屋P, Qを定める. 1つの球が部屋Pを出発し, 1秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する. 球が  $n$  秒後に部屋Qにある確率を求めよ.



3 座標平面上で2つの不等式

$$y \geq \frac{1}{2}x^2, \quad \frac{x^2}{4} + 4y^2 \leq \frac{1}{8}$$

によって定まる領域を  $S$  とする.  $S$  を  $x$  軸のまわりに回転してできる立体の体積を  $V_1$  とし,  $y$  軸のまわりに回転してできる立体の体積を  $V_2$  とする.

(1)  $V_1$  と  $V_2$  の値を求めよ.

(2)  $\frac{V_2}{V_1}$  の値と1の大小を判定せよ.

4  $n$  を2以上の整数とする. 自然数(1以上の整数)の  $n$  乗になる数を  $n$  乗数と呼ぶことにする. 以下の問いに答えよ.

(1) 連続する2個の自然数の積は  $n$  乗数でないことを示せ.

(2) 連続する  $n$  個の自然数の積は  $n$  乗数でないことを示せ.

5 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が次の条件 (D) を満たすとする.

(D)  $A$  の成分  $a, b, c, d$  は整数である. また, 平面上の 4 点  $(0, 0), (a, b), (a+c, b+d), (c, d)$  は, 面積 1 の平行四辺形の 4 つの頂点をなす.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 行列  $BA$  と  $B^{-1}A$  も条件 (D) を満たすことを示せ.

(2)  $c = 0$  ならば,  $A$  に  $B, B^{-1}$  のどちらかを左から次々にかけることにより, 4 個の行列  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  のどれかにできることを示せ.

(3)  $|a| \geq |c| > 0$  とする.  $BA, B^{-1}A$  の少なくともどちらか一方は, それを  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  とすると

$$|x| + |z| < |a| + |c|$$

を満たすことを示せ.

**6**  $2 \times 2$  行列  $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  に対して

$$\text{Tr}(P) = p + s$$

と定める.

$a, b, c$  は  $a \geq b > 0, 0 \leq c \leq 1$  を満たす実数とする. 行列  $A, B, C, D$  を次で定める.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数  $x$  に対し  $U(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$  とする.

このとき以下の問いに答えよ.

(1) 各実数  $t$  に対して,  $x$  の関数

$$f(x) = \text{Tr} \left( (U(t)AU(-t) - B)U(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U(-x) \right)$$

の最大値  $m(t)$  を求めよ. (ただし, 最大値をとる  $x$  を求める必要はない.)

(2) すべての実数  $t$  に対し

$$2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

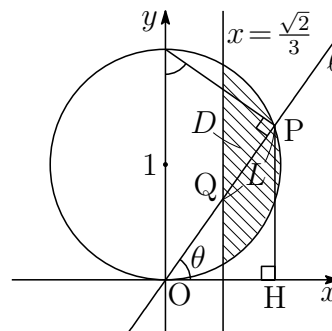
が成り立つことを示せ.

## 解答例

- 1  $\ell$  と円  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  および直線  $x = \frac{\sqrt{2}}{3}$  との交点をそれぞれ P, Q とし, P から  $x$  軸に垂線 PH を引くと

$$OP = 2 \sin \theta, \quad OQ = \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta},$$

$$OH = OP \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$



$$\sin 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ を満たす } \theta \text{ を } \alpha, \beta \text{ とすると } \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 \theta - 3\sqrt{2} \tan \theta + 1 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad \tan \alpha = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{14}}{2}, \quad \tan \beta = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$$

領域  $D$  と共有点を持つ条件から,  $\alpha < \theta < \beta$  において

$$\begin{aligned} L &= OP - OQ = 2 \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta} \\ \frac{dL}{d\theta} &= 2 \cos \theta - \frac{\sqrt{2} \sin \theta}{3 \cos^2 \theta} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta \{ \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) - 3\sqrt{2} \} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3} \cos \theta (\tan \theta - \sqrt{2}) (\tan^2 \theta + \sqrt{2} \tan \theta + 3) \end{aligned}$$

$\tan \theta_0 = \sqrt{2}$  とおくと  $\left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $\alpha < \theta_0 < \beta$  であるから

| $\theta$             | $(\alpha)$ | $\dots$    | $\theta_0$ | $\dots$    | $(\beta)$ |
|----------------------|------------|------------|------------|------------|-----------|
| $\frac{dL}{d\theta}$ |            | +          | 0          | -          |           |
| $L$                  |            | $\nearrow$ | 極大         | $\searrow$ |           |

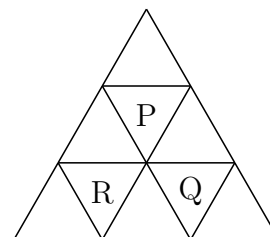
$L$  を最大にする  $\theta$  は

$$\tan \theta = \sqrt{2} \quad \text{これから} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{このとき} \quad L = 2 \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{3 \cos \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

- 2 右の図のように部屋 R をとると,  $n$  秒後の球は,  $n$  が偶数のとき, 部屋 P, Q, R にあり,  $n$  が奇数のとき, P, Q, R 以外の部屋にある.  
したがって,  $n$  が奇数のとき, 部屋 Q にある確率は

$$0$$



$n$  が偶数のとき,  $n = 2k$  秒後に, P, Q, R にある確率を  $p_k, q_k, r_k$  とすると

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ q_{k+1} &= q_k \times \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ r_{k+1} &= r_k \times \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって,  $k$  を 0 以上の整数とすると, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = 0$$

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{2}{3}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{2}{3}r_k \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の辺々を加えると

$$p_{k+1} + q_{k+1} + r_{k+1} = p_k + q_k + r_k \quad \text{ゆえに} \quad p_k + q_k + r_k = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{2}(p_k - q_k) \quad \text{ゆえに} \quad p_k - q_k = \frac{1}{2^k} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } q_{k+1} - r_{k+1} = \frac{1}{2}(q_k - r_k) \quad \text{ゆえに} \quad q_k - r_k = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } q_k = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

よって, 求める確率は  $n$  が奇数のとき  $0$ ,

$$n \text{ が偶数のとき } \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \right)$$



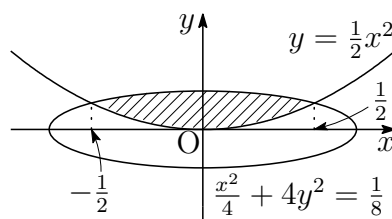
3 (1)  $y = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}, \frac{x^2}{4} + 4y^2 = \frac{1}{8} \cdots \textcircled{2}$

①, ② から  $y$  を消去すると

$$\frac{x^2}{4} + x^4 = \frac{1}{8}$$

ゆえに  $(2x^2 + 1)(4x^2 - 1) = 0$  これを解いて  $x = \pm \frac{1}{2}$

① より  $y^2 = \frac{1}{4}x^4$ , ② より  $y^2 = \frac{1}{32}(1 - 2x^2)$  であるから



$$\begin{aligned} V_1 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{32}(1 - 2x^2) - \frac{1}{4}x^4 \right\} dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{32} \left( x - \frac{2}{3}x^3 \right) - \frac{1}{20}x^5 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{480}\pi \end{aligned}$$

① および ② の  $x$  軸の上側の方程式が  $y = \frac{1}{8}\sqrt{2 - 4x^2}$  であるから

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x \left( \frac{1}{8}\sqrt{2 - 4x^2} - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{96}(2 - 4x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{192}\pi \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} - 1 &= \frac{8\sqrt{2} - 7}{192} \cdot \frac{480}{11} - 1 = \frac{5(8\sqrt{2} - 7)}{22} - 1 \\ &= \frac{40\sqrt{2} - 57}{22} = \frac{\sqrt{3200} - \sqrt{3249}}{22} < 0 \end{aligned}$$

よって  $\frac{V_2}{V_1} < 1$

**補足** 一般に,  $a \leq x \leq b$  において  $f(x) \geq 0$  であるとき,  $y = f(x)$  と  $x$  軸で囲まれた図形  $S$  を  $x$  軸および  $y$  軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ  $V_1$ ,  $V_2$  とすると

$$V_1 = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx, \quad V_2 = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

$S$  を  $x$  軸を元に  $y$  軸方向に  $k$  倍に拡大した図形を  $x$  軸および  $y$  軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ  $V_x$ ,  $V_y$  とすると

$$\begin{aligned} V_k &= \pi \int_a^b \{kf(x)\}^2 dx = k^2 V_1, \\ V_y &= 2\pi \int_a^b x \{kf(x)\} dx = k V_2 \end{aligned}$$

①, ② の図形をそれぞれ  $x$  軸を元に  $y$  軸方向に 4 倍に拡大すると

$$y = 2x^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

これらの図形によって囲まれる部分を  $x$  軸および  $y$  軸のまわりに回転してできる立体の体積をそれぞれ  $V_x$ ,  $V_y$  とすると

$$\begin{aligned} V_x &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - x^2 - (2x^2)^2 \right\} dx \\ &= 2\pi \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{30}\pi, \\ V_y &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} x \left( \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} - 2x^2 \right) dx \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} - x^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{8\sqrt{2} - 7}{48}\pi \end{aligned}$$

このとき,  $V_x = 4^2 V_1$ ,  $V_y = 4 V_2$  であるから

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{16} V_x = \frac{1}{16} \cdot \frac{11}{30} \pi = \frac{11}{480} \pi, \\ V_2 &= \frac{1}{4} V_y = \frac{1}{4} \cdot \frac{8\sqrt{2} - 7}{48} \pi = \frac{8\sqrt{2} - 7}{192} \pi \end{aligned}$$



- 4 (1) 連続する自然数  $k, k+1$  は互いに素である. この2数の積が  $n$  乗数であるから,  $k, k+1$  は整数  $l, m$  を用いて

$$k = l^n, k+1 = m^n$$

とおける ( $1 \leq l < m$ ). 上の2式から  $1 = m^n - l^n \dots (*)$

$$\text{上式の右辺は } m^n - l^n = (m-l) \sum_{i=1}^n m^{n-i} l^{i-1} \geq \sum_{i=1}^n m^{n-i} \geq 2$$

これは  $(*)$  に反するので, 連続する2個の自然数の積は  $n$  乗数ではない.

- (2)  $n > 2$  に対して, 連続する  $n$  個の自然数  $k, k+1, \dots, k+n-1$  の積が  $n$  乗数であると仮定すると, 次式を満たす整数  $N$  が存在する.

$$k(k+1) \cdots (k+n-1) = N^n \quad (k < N < k+n-1)$$

上式から,  $N = k+j-1$  を満たす自然数  $j$  ( $1 < j < n$ ) が存在するので

$$k(k+1) \cdots (k+j-2)(k+j) \cdots (k+n-1) = (k+j-1)^{n-1}$$

これから,  $k+j$  が  $(k+j-1)^{n-1}$  の約数となるが,  $k+j-1$  と  $k+j$  は互いに素であるから, 矛盾を生じる.

よって, 連続する  $n$  個の自然数の積は  $n$  乗数ではない. ■



**5** (1) (D) の条件は,  $|\det(A)| = 1$  を満たすことである.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{より} \quad \det(B) = 1, \quad \det(B^{-1}) = 1$$

$$\text{したがって} \quad |\det(BA)| = |\det(B)\det(A)| = 1,$$

$$|\det(B^{-1}A)| = |\det(B^{-1})\det(A)| = 1$$

よって, 行列  $BA$  と  $B^{-1}A$  も条件 (D) を満たす.

(2)  $c = 0$  のとき, (\*) より  $|ad| = 1$

$a, d$  は整数であるから  $a = \pm 1, d = \pm 1$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{より}$$

$$B^n A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + nd \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

$$(B^{-1})^n A = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b - nd \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$b$  は整数,  $d = \pm 1$  であるから

$$b + nd = 0 \quad \text{または} \quad b - nd = 0$$

を満たす整数  $n$  が存在するので, このとき,  $B^n A$  または  $(B^{-1})^n A$  は

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

となる.  $a = \pm 1, d = \pm 1$  であるから, 題意は成立する.

$$(3) \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$|a| \geq |c| > 0 \quad \text{より} \quad \begin{array}{ll} ac > 0 \text{ のとき} & |a - c| = |a| - |c| \\ ac < 0 \text{ のとき} & |a + c| = |a| + |c| \end{array}$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{array}{ll} ac > 0 \text{ のとき} & |a - c| + |c| = |a| < |a| + |c| \\ ac < 0 \text{ のとき} & |a + c| + |c| = |a| < |a| + |c| \end{array}$$

よって,  $BA, B^{-1}A$  の少なくともどちらか一方を  $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  としたとき,

$$|x| + |z| < |a| + |c| \text{ が成立する.} \quad \blacksquare$$

**6** (1)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  とおくと,  $A = \frac{a+b}{2}E + \frac{a-b}{2}F$ ,  
 $B = \frac{a+b}{2}E - \frac{a-b}{2}F$  であるから

$$\begin{aligned} U(t)AU(-t) - B &= U(t) \left( \frac{a+b}{2}E + \frac{a-b}{2}F \right) U(-t) - \left( \frac{a+b}{2}E - \frac{a-b}{2}F \right) \\ &= \frac{a-b}{2} \{ U(t)FU(-t) + F \} \end{aligned}$$

したがって, 対角和の線形性および互換性により

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a-b}{2} \text{Tr}((U(t)FU(-t) + F)U(x)FU(-x)) \\ &= \frac{a-b}{2} \text{Tr}(U(-x)(U(t)FU(-t) + F)U(x)F) \\ &= \frac{a-b}{2} \{ \text{Tr}(U(-x+t)FU(x-t)F) + \text{Tr}(U(-x)FU(x)F) \} \end{aligned}$$

ここで,  $G(x) = U(-x)FU(x)F$  とおくと

$$\begin{aligned} G(x) &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ -\sin x & -\cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

上の結果より,  $\text{Tr}(G(x)) = 2 \cos 2x$  であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a-b}{2} \{ \text{Tr}(G(x-t)) + \text{Tr}(G(x)) \} \\ &= \frac{a-b}{2} \{ 2 \cos 2(x-t) + 2 \cos 2x \} \\ &= 2(a-b) \cos t \cos(2x-t) \end{aligned}$$

$a \geq b$  に注意して  $\mathbf{m}(t) = 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})|\cos t|$

**補足**  $\text{Tr}(kA) = k\text{Tr}(A)$ ,  $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$  が成立する (線形性).  
 互換性により次が成立する (① と ② は必ずしも一致しない).

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \text{Tr}(BA), \\ \text{Tr}(ABC) &= \text{Tr}(CAB) = \text{Tr}(BCA) \quad \cdots \text{①}, \\ \text{Tr}(ACB) &= \text{Tr}(BAC) = \text{Tr}(CBA) \quad \cdots \text{②} \end{aligned}$$

$$(2) \quad C = \frac{a^c + b^c}{2}E + \frac{a^c - b^c}{2}F, \quad D = \frac{b^{1-c} + a^{1-c}}{2}E + \frac{b^{1-c} - a^{1-c}}{2}F \text{ であるから}$$

$$p = \frac{a^c + b^c}{2}, \quad q = \frac{a^c - b^c}{2}, \quad r = \frac{b^{1-c} + a^{1-c}}{2}, \quad s = \frac{b^{1-c} - a^{1-c}}{2}$$

とおくと,  $C = pE + qF$ ,  $D = rE + sF$  であるから

$$\begin{aligned} U(t)CU(-t)D &= U(t)(pE + qF)U(-t)(rE + sF) \\ &= prE + psF + qrU(t)FU(-t) + qsU(t)FU(-t)F \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} U(t)FU(-t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \sin 2t & -\cos 2t \end{pmatrix}, \\ U(t)FU(-t)F &= \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ \sin 2t & -\cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(E) = 2, \quad \text{Tr}(F) = 0 \text{ および}$$

$$\text{Tr}(U(t)FU(-t)) = 0, \quad \text{Tr}(U(t)FU(-t)F) = 2 \cos 2t$$

であるから

$$\begin{aligned} 2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) &= 2pr\text{Tr}(E) + 2qs\text{Tr}(U(t)FU(-t)F) \\ &= 4pr + 4qs \cos 2t \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

また, (1) と同様にして

$$\begin{aligned} U(t)AU(-t) + B &= U(t) \left( \frac{a+b}{2}E + \frac{a-b}{2}F \right) U(-t) + \left( \frac{a+b}{2}E - \frac{a-b}{2}F \right) \\ &= (a+b)E + \frac{a-b}{2}\{U(t)FU(-t) - F\} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) = (a+b)\text{Tr}(E) = 2(a+b)$$

これと (1) の結果により

$$\text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t) = 2(a+b) - 2(a-b)|\cos t| \quad \cdots (**)$$

したがって

$$\begin{aligned}
 (*) &= 4pr + 4qs \cos 2t \\
 &= 4pr + 4qs(2 \cos^2 t - 1) \\
 &= 4pr - 4qs + 8qs \cos^2 t \\
 &= (a^c + b^c)(b^{1-c} + a^{1-c}) - (a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c}) \\
 &\quad + 2(a^c - b^c)(b^{1-c} - a^{1-c}) \cos^2 t \\
 &= 2(a + b) - 2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2
 \end{aligned}$$

$a \geq b > 0$  に注意して

$$\begin{aligned}
 (*) - (**) &= -2(a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|^2 + 2(a - b)|\cos t| \\
 &= 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})|\cos t|\} \\
 &\geq 2|\cos t|\{a - b - (a^c - b^c)(a^{1-c} - b^{1-c})\} \\
 &= 2|\cos t|(a^c b^{1-c} + a^{1-c} b^c - 2b) \\
 &\geq 2|\cos t|(2\sqrt{a^c b^{1-c} \cdot a^{1-c} b^c} - 2b) \\
 &= 4|\cos t|(\sqrt{ab} - b) = 4|\cos t|\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geq 0
 \end{aligned}$$

よって、すべての実数  $t$  に対し

$$2\text{Tr}(U(t)CU(-t)D) \geq \text{Tr}(U(t)AU(-t) + B) - m(t)$$

が成り立つ. ■