

平成23年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 座標平面において, 点 $P(0, 1)$ を中心とする半径1の円を C とする. a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし, 直線 $y = a(x + 1)$ と C との交点を Q, R とする.

- (1) $\triangle PQR$ の面積 $S(a)$ を求めよ.
(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき, $S(a)$ が最大となる a を求めよ.

- 2 実数 x の小数部分を, $0 \leq y < 1$ かつ $x - y$ が整数となる実数 y のこととし, これを記号 $\langle x \rangle$ で表す. 実数 a に対して, 無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように順次定める.

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \quad a_1 = \langle a \rangle \\ & \text{(ii)} \quad \begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = \left\langle \frac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき, } a_{n+1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $a = \sqrt{2}$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ を求めよ.
(2) 任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\frac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ.
(3) a が有理数であるとする. a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \frac{p}{q}$ と表すとき, q 以上のすべての自然数 n に対して, $a_n = 0$ であることを示せ.
- 3 L を正定数とする. 座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $P(t, 0)$ に対し, 原点 O を中心とし点 P を通る円周上を, P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $Q(u(t), v(t))$ と表す.

- (1) $u(t), v(t)$ を求めよ.
(2) $0 < a < 1$ の範囲の実数 a に対し, 積分

$$f(a) = \int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} dt$$

を求めよ.

- (3) 極限 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ.

- 4 座標平面上の1点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ をとる. 放物線 $y = x^2$ 上の2点 $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ を, 3点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき, $\triangle PQR$ の重心 $G(X, Y)$ の軌跡を求めよ.

- 5 p, q を2つの正の整数とする. 整数 a, b, c で条件

$$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p, \quad b \leq c \leq a$$

を満たすものを考え, このような a, b, c を $[a, b; c]$ の形に並べたものを (p, q) パターンと呼ぶ. 各 (p, q) パターン $[a, b; c]$ に対して

$$w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$$

とおく.

- (1) (p, q) パターンのうち, $w([a, b; c]) = -q$ となるものの個数を求めよ.
また, $w([a, b; c]) = p$ となる (p, q) パターンの個数を求めよ.

以下 $p = q$ の場合を考える.

- (2) s を整数とする. (p, p) パターンで $w[a, b; c] = -p + s$ となるものの個数を求めよ.
(3) (p, p) パターンの総数を求めよ.

- 6 (1) x, y を実数とし, $x > 0$ とする. t を変数とする2次関数 $f(t) = xt^2 + yt$ の $0 \leq t \leq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ.
(2) 次の条件を満たす点 (x, y) 全体からなる座標平面内の領域を S とする.

$x > 0$ かつ, 実数 z で $0 \leq t \leq 1$ の範囲の全ての实数 t に対して

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

を満たすようなものが存在する.

S の概形を図示せよ.

- (3) 次の条件を満たす点 (x, y, z) 全体からなる座標空間内の領域を V とする.

$0 \leq x \leq 1$ かつ, $0 \leq t \leq 1$ の範囲の全ての实数 t に対して,

$$0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$$

が成り立つ.

V の体積を求めよ.

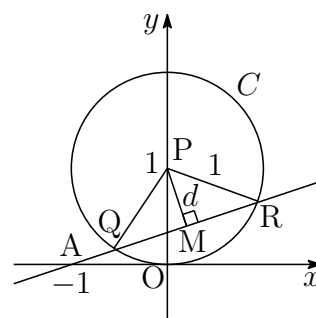
解答例

- 1 (1) 2点Q, Rの中点をMとし, $d = PM$ とおくと,
 d は点 $P(0, 1)$ と直線 $ax - y + a = 0$ の距離であるから, $0 < a < 1$ に注意して

$$d = \frac{|-1 + a|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} \text{また } QR &= 2MR = 2\sqrt{PR^2 - d^2} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{(1-a)^2}{a^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{よって } S(a) = \frac{1}{2}QR \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{1 - a}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2a}(1 - a)}{a^2 + 1}$$



- (2) $0 < a < 1$ より, $a = \tan \theta$ とおくと $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{\sqrt{2 \tan \theta} (1 - \tan \theta)}{\tan^2 \theta + 1} \\ &= \sqrt{2 \sin \theta \cos \theta} (\cos \theta - \sin \theta) \\ &= \sqrt{\sin 2\theta (1 - \sin 2\theta)} \\ &= \sqrt{-\left(\sin 2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$S(a)$ は, $\theta = \frac{\pi}{12}$, すなわち, $a = 2 - \sqrt{3}$ のとき最大となる.

別解 $A(-1, 0)$ とすると, $AQ \cdot AR = AO^2$ であるから, $AR = t$, $AQ = \frac{1}{t}$ とし,
 $S = \triangle PQR$, $u = MR$ とすると ($0 < u < 1$)

$$QR = 2u = t - \frac{1}{t}, \quad d = \sqrt{1 - u^2}, \quad S = u\sqrt{1 - u^2}$$

$$\text{したがって } \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1 - 2u^2}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$$

$u = \frac{1}{\sqrt{2}}$, すなわち, $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, S は極大かつ最大となる.

$0 < a < 1$ に注意してこれを解くと $a = 2 - \sqrt{3}$ ■

2 (1) $a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1 \text{ より } \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2} + 1 \rangle = \sqrt{2} - 1$$

よって $a_n = \sqrt{2} - 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$

(2) $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = \frac{1}{a} - m = a$ (m は自然数) であるから

$$a^2 + ma - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$$

$$a \geq 0 \text{ であるから} \quad a = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \quad \dots (*)$$

$$a \geq \frac{1}{3} \text{ であるから, } \frac{-m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} \geq \frac{1}{3} \text{ より}$$

$$\sqrt{m^2 + 4} \geq m + \frac{2}{3} \quad \text{両辺を平方して整理すると} \quad m \leq \frac{8}{3}$$

$$m \text{ は自然数であるから } m = 1, 2 \quad (*) \text{ より } a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \sqrt{2} - 1$$

(3) $a = \frac{p}{q}$ について, $q_0 = q$, p を q で割った余りを q_1 とすると

$$a_1 = \left\langle \frac{p}{q} \right\rangle = \frac{q_1}{q_0}$$

q_{n-1} を q_n で割った余りを q_{n+1} とすると

$$a_{n+1} = \left\langle \frac{q_{n-1}}{q_n} \right\rangle = \frac{q_{n+1}}{q_n} \quad (q_{n+1} < q_n)$$

$\{q_n\}$ は整数からなる減少列で, $q_m = 0$ となる自然数 m ($1 \leq m \leq q$) が存在する. よって, 与えられた $a = \frac{p}{q}$ のとき, q 以上のすべての自然数 n に対して, $a_n = 0$ となる. ■

3 (1) $\varphi = \angle POQ$ とおくと $t\varphi = L$ ゆえに $\varphi = \frac{L}{t}$

$$\text{よって} \quad u(t) = t \cos \varphi = t \cos \frac{L}{t}, \quad v(t) = t \sin \varphi = t \sin \frac{L}{t}$$

(2) (1) の結果から

$$u'(t) = \cos \frac{L}{t} + t \left(\cos \frac{L}{t} \right)' = \cos \frac{L}{t} + t \cdot \frac{L}{t^2} \sin \frac{L}{t} = \cos \frac{L}{t} + \frac{L}{t} \sin \frac{L}{t},$$

$$v'(t) = \sin \frac{L}{t} + t \left(\sin \frac{L}{t} \right)' = \sin \frac{L}{t} + t \left(-\frac{L}{t^2} \cos \frac{L}{t} \right) = \sin \frac{L}{t} - \frac{L}{t} \cos \frac{L}{t}$$

$$\text{したがって} \quad \{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2 = 1 + \frac{L^2}{t^2}$$

$$\text{ゆえに} \quad \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} = \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t}$$

$$t = L \tan \theta \text{ とおくと } (t > 0) \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{L}{\cos^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt = \int \frac{\sqrt{(L \tan \theta)^2 + L^2}}{L \tan \theta} \cdot \frac{L}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= L \int \frac{d\theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \frac{1}{\sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{\sin \theta}{2(1 + \cos \theta)}$$

$$\begin{aligned} I &= L \int \left\{ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{\sin \theta}{2(1 + \cos \theta)} \right\} d\theta \\ &= \frac{L}{\cos \theta} + \frac{L}{2} \log \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} + C \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad \frac{L}{\cos \theta} = L \sqrt{\tan^2 \theta + 1} = \sqrt{(L \tan \theta)^2 + L^2} = \sqrt{t^2 + L^2}$$

$$\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{\frac{L}{\cos \theta} - L}{\frac{L}{\cos \theta} + L} = \frac{\sqrt{t^2 + L^2} - L}{\sqrt{t^2 + L^2} + L} = \frac{t^2}{(\sqrt{t^2 + L^2} + L)^2}$$

$$\text{したがって} \quad \int \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt = \sqrt{t^2 + L^2} + L \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2} + L} + C$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad f(a) &= \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt = \left[\sqrt{t^2 + L^2} + L \log \frac{t}{\sqrt{t^2 + L^2} + L} \right]_a^1 \\ &= \sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} + L \log \frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{a(\sqrt{1 + L^2} + L)} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から, $\lim_{a \rightarrow +0} \log a = -\infty$, $\lim_{a \rightarrow +0} \sqrt{a^2 + L^2} = L$ に注意して

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} &= \lim_{a \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\log a} \left(\sqrt{1 + L^2} - \sqrt{a^2 + L^2} + L \log \frac{\sqrt{a^2 + L^2} + L}{\sqrt{1 + L^2} + L} \right) - L \right\} \\ &= -L \end{aligned}$$

別解 $\sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} = \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t}$ に

$$L^2 < t^2 + L^2 < (t + L)^2$$

を適用すると ($t > 0$, $L > 0$)

$$\frac{L}{t} < \sqrt{\{u'(t)\}^2 + \{v'(t)\}^2} < 1 + \frac{L}{t}$$

$$\begin{aligned} \text{これから} \quad \int_a^1 \frac{L}{t} dt &= \left[L \log t \right]_a^1 = -L \log a \\ \int_a^1 \left(1 + \frac{L}{t} \right) dt &= \left[t + L \log t \right]_a^1 = 1 - a - L \log a \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad -L \log a < f(a) < 1 - a - L \log a$$

$0 < a < 1$ のとき, $\log a < 0$ に注意して

$$-L > \frac{f(a)}{\log a} > \frac{1-a}{\log a} - L$$

このとき, $\lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{1-a}{\log a} - L \right) = -L$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} = -L$$

補足 $\lim_{a \rightarrow +0} \log a = -\infty$, $\lim_{a \rightarrow +0} f(a) = +\infty$ であるから, ロピタルの定理により

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} \frac{f(a)}{\log a} &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{f'(a)}{(\log a)'} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{\frac{d}{da} \int_a^1 \frac{\sqrt{t^2 + L^2}}{t} dt}{\frac{1}{a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} \frac{-\frac{\sqrt{a^2 + L^2}}{a}}{\frac{1}{a}} = \lim_{a \rightarrow +0} (-\sqrt{a^2 + L^2}) = -L \end{aligned}$$

ロピタルの定理は大学入試の解答に用いることはできないが, 先に答を出して, 結果を見据えて解答が書ける. 実際, (3) では, $-L$ が答であることに注意しながら解答している. ■

4 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ とする $\triangle PQR$ の重心が $G(X, Y)$ であるから

$$3X = \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \quad 3Y = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 3X - \frac{1}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3Y - \frac{1}{4} \end{cases}$$

条件により, $PQ^2 = PR^2$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 \\ \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)^2 &= 0 \\ (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1) + (\alpha^2 - \beta^2) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$Q \neq R$ より, $\alpha - \beta \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 1 + (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ (\alpha + \beta) \left(\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

(*) より, α, β は 2 次方程式の解で, これらは異なる 2 つの実数であるから

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$$

これを (**) に代入すると $\frac{1}{\alpha + \beta} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$

ここで, $t = \alpha + \beta$ において整理すると

$$\frac{t^3 + t - 2}{t} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(t - 1)(t^2 + t + 2)}{t} < 0$$

$t^2 + t + 2 = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ に注意して, これを解くと $0 < t < 1$

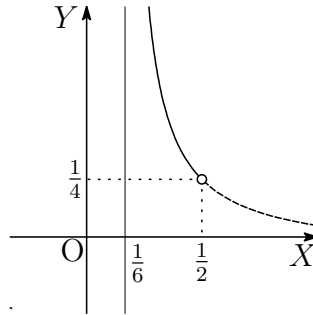
$0 < \alpha + \beta < 1$ であるから, (*) の第 1 式より $\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}$

(*) を (**) に代入すると
$$3Y - \frac{1}{4} = \frac{1}{3X - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

したがって, $G(X, Y)$ の軌跡の方程式は

$$Y = \frac{1}{9\left(X - \frac{1}{6}\right)} - \frac{1}{12} \quad \left(\frac{1}{6} < X < \frac{1}{2}\right)$$

よって, $G(X, Y)$ の軌跡は, 下の図のようになる.



注意 α と β を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$$

実係数の 2 次方程式の解が α, β であるとき

$$\text{異なる 2 つの実数解をもつ} \iff (\alpha - \beta)^2 > 0$$



5 (1) $w([a, b; c]) = p - q - (a + b)$ より, $w([a, b; c]) = -q$ となるとき

$$p - q - (a + b) = -q \quad \text{ゆえに} \quad p = a + b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = p, b = 0$

$b \leq c \leq a$ より, $0 \leq c \leq p$ であるから, 求める個数は $p + 1$ (個)

$w([a, b; c]) = p$ となるとき

$$p - q - (a + b) = p \quad \text{ゆえに} \quad q = -a - b$$

$-q \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ より, 上式を満たすのは $a = 0, b = -q$

$b \leq c \leq a$ より, $-q \leq c \leq 0$ であるから, 求める個数は $q + 1$ (個)

(2) $p = q$ より, $w([a, b; c]) = -(a + b)$

$w([a, b; c]) = -p + s$ となるとき

$$-(a + b) = -p + s \quad \text{ゆえに} \quad b = -a + p - s$$

これを $-p \leq b \leq 0 \leq a \leq p$ に代入して

$$-p \leq -a + p - s \leq 0 \leq a \leq p \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} 0 \leq a \leq p \\ p - s \leq a \leq 2p - s \end{cases}$$

ここで, $m = \max(0, p - s)$, $M = \min(p, 2p - s)$ とおくと

$$m = \frac{p - s + |p - s|}{2}, \quad M = \frac{3p - s - |p - s|}{2}$$

求める個数を $f(s)$ とする.

$$(i) \quad m > M \text{ のとき} \quad \frac{p - s + |p - s|}{2} > \frac{3p - s - |p - s|}{2}$$

$$\text{すなわち} \quad |p - s| > p \text{ のとき} \quad f(s) = 0$$

$$(ii) \quad m \leq M \text{ のとき} \quad \frac{p - s + |p - s|}{2} \leq \frac{3p - s - |p - s|}{2}$$

$$\text{すなわち,} \quad |p - s| \leq p \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{a=m}^M (a - b + 1) = \sum_{a=m}^M \{a - (-a + p - s) + 1\} \\ &= \sum_{a=m}^M (2a - p + s + 1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} (M - m + 1)(M + m) + (-p + s + 1)(M - m + 1) \\ &= (M - m + 1)(M + m - p + s) \\ &= (p + 1 - |p - s|)(p + 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad f(s) = \begin{cases} 0 & (s < 0, 2p < s) \\ (p + 1)(s + 1) & (0 \leq s \leq p) \\ (p + 1)(2p - s + 1) & (p < s \leq 2p) \end{cases}$$

(3) (2) の結果から, 求める (p, p) パターンの総数を $S(p, p)$ とすると

$$\begin{aligned}
 S(p, p) &= \sum_{s=0}^{2p} f(s) \\
 &= (p+1) \left\{ \sum_{s=0}^p (s+1) + \sum_{s=p+1}^{2p} (2p-s+1) \right\} \\
 &= (p+1) \left\{ 1 + \sum_{s=1}^p (s+1) + \sum_{s=1}^p s \right\} \\
 &= (p+1) \left\{ 1 + \sum_{s=1}^p (2s+1) \right\} \\
 &= (p+1) \{1 + p(p+2)\} = (\mathbf{p+1})^3
 \end{aligned}$$

別解 (p, q) パターンの総数を $S(p, q)$ とすると

$$\begin{aligned}
 S(p, q) &= \sum_{a=0}^p \sum_{b=-q}^0 (a-b+1) \\
 &= \sum_{a=0}^p \sum_{b=0}^q \{(a+1) + b\} \\
 &= \sum_{a=0}^p \left\{ (a+1)(q+1) + \frac{1}{2}q(q+1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2}(q+1) \sum_{a=0}^p (2a+2+q) \\
 &= \frac{1}{2}(q+1)(p+1)(p+q+2)
 \end{aligned}$$

よって $S(p, p) = (p+1)^3$



6 (1) $f(t) = xt^2 + yt = x\left(t + \frac{y}{2x}\right)^2 - \frac{y^2}{4x} \quad (x > 0)$

$0 \leq t \leq 1$ における $f(t)$ の最大値を M , 最小値を m とする.

$$\frac{1}{2} \leq -\frac{y}{2x}, \text{ すなわち, } y \leq -x \text{ のとき } M = f(0) = 0$$

$$-\frac{y}{2x} \leq \frac{1}{2}, \text{ すなわち, } -x \leq y \text{ のとき } M = f(1) = x + y$$

$$1 \leq -\frac{y}{2x}, \text{ すなわち, } y \leq -2x \text{ のとき } m = f(1) = x + y$$

$$0 \leq -\frac{y}{2x} \leq 1, \text{ すなわち, } -2x \leq y \leq 0 \text{ のとき } m = f\left(-\frac{y}{2x}\right) = -\frac{y^2}{4x}$$

$$-\frac{y}{2x} \leq 0, \text{ すなわち, } 0 \leq y \text{ のとき } m = f(0) = 0$$

したがって
$$M - m = \begin{cases} f(0) - f(1) & (y \leq -2x) \\ f(0) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) & (-2x \leq y \leq -x) \\ f(1) - f\left(-\frac{y}{2x}\right) & (-x \leq y \leq 0) \\ f(1) - f(0) & (0 \leq y) \end{cases}$$

よって
$$M - m = \begin{cases} -x - y & (y \leq -2x) \\ \frac{y^2}{4x} & (-2x \leq y \leq -x) \\ x + y + \frac{y^2}{4x} & (-x \leq y \leq 0) \\ x + y & (0 \leq y) \end{cases}$$

- (2) $0 \leq xt^2 + yt + z \leq 1$ より, $0 \leq f(t) + z \leq 1$ であるから, すべての t ($0 \leq t \leq 1$) に対して

$$-f(t) \leq z \leq 1 - f(t) \quad \text{ゆえに} \quad -m \leq z \leq 1 - M \quad \cdots (*)$$

上式を満たす実数 z が存在するための必要十分条件は

$$-m \leq 1 - M \quad \text{すなわち} \quad M - m \leq 1$$

したがって, これを (1) の結果に適用する.

$$(i) \quad \begin{cases} y \leq -2x \\ -x - y \leq 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad -x - 1 \leq y \leq -2x$$

$$(ii) \quad \begin{cases} -2x \leq y \leq -x \\ \frac{y^2}{4x} \leq 1 \end{cases} \quad \text{第2式から} \quad (y + 2\sqrt{x})(y - 2\sqrt{x}) \leq 0$$

第1式から, $y < 0$ であるから, $y - 2\sqrt{x} < 0$ より $y + 2\sqrt{x} \geq 0$

$$\text{ゆえに} \quad \max(-2x, -2\sqrt{x}) \leq y \leq -x$$

$$(iii) \quad \begin{cases} -x \leq y \leq 0 \\ x + y + \frac{y^2}{4x} \leq 1 \end{cases} \quad \text{第2式から} \quad (2x + y)^2 \leq 4x$$

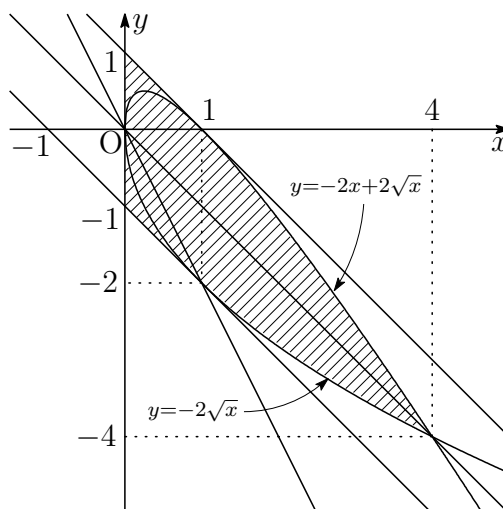
$$\text{したがって} \quad (y + 2x + 2\sqrt{x})(y + 2x - 2\sqrt{x}) \leq 0$$

第1式から $y + 2x + 2\sqrt{x} > x + y \geq 0$

$$\text{ゆえに} \quad y + 2x - 2\sqrt{x} \leq 0 \quad \text{よって} \quad -x \leq y \leq \min(0, -2x + 2\sqrt{x})$$

$$(iv) \quad \begin{cases} 0 \leq y \\ x + y \leq 1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq y \leq -x + 1$$

(i)~(iv) より, S の概形は下の図の斜線部分で, y 軸を除く境界線を含む.



(3) (1) で求めた M , m を (*) に適用する.

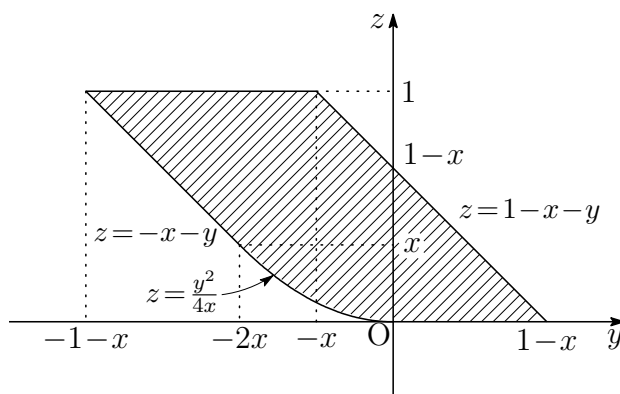
$$(i) \ y \leq -2x \text{ のとき } -x - y \leq z \leq 1 \quad (-1 - x \leq y \leq -2x)$$

$$(ii) \ -2x \leq y \leq -x \text{ のとき } \frac{y^2}{4x} \leq z \leq 1$$

$$(iii) \ -x \leq y \leq 0 \text{ のとき } \frac{y^2}{4x} \leq z \leq 1 - x - y$$

$$(iv) \ 0 \leq y \text{ のとき } 0 \leq z \leq 1 - x - y \quad (0 \leq y \leq 1 - x)$$

x を固定すると, 立体 V の x 軸と垂直な断面は, 次のようになる.



上の図の斜線部分の面積を $S(x)$ とすると

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_{-1-x}^{-x} 1 \, dy + \int_{-x}^{1-x} (1 - x - y) \, dy - \int_{-1-x}^{-2x} (-x - y) \, dy - \int_{-2x}^0 \frac{y^2}{4x} \, dy \\ &= 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} (1 - x)(1 + x) - \left[\frac{y^3}{12x} \right]_{-2x}^0 = 1 - \frac{x^2}{6} \end{aligned}$$

よって, 求める V の体積は

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) dx = \left[x - \frac{x^3}{18} \right]_0^1 = \frac{17}{18}$$

注意 $S(x)$ は, 正方形, 直角二等辺三角形, 台形の面積および放物線で囲まれた部分の面積として計算する.

補足 (2)(iii) の不等式 $(2x + y)^2 \leq 4x$ の境界線 $(2x + y)^2 = 4x$ は放物線である.
 実際, 直交変換

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

により, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X + Y)$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(X - 2Y)$, $2x + y = \sqrt{5}X$ であるから

$$5X^2 \leq \frac{4}{\sqrt{5}}(2X + Y) \quad \text{ゆえに} \quad Y \geq \frac{5\sqrt{5}}{4} \left(X - \frac{4}{5\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{4}{5\sqrt{5}}$$

$$\text{放物線の頂点は} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{4}{5\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

放物線の軸は, 点 $\left(\frac{4}{25}, \frac{12}{25}\right)$ を通り, 傾き -2 の直線であるから

$$y - \frac{12}{25} = -2 \left(x - \frac{4}{25} \right) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + \frac{4}{5}$$

$$\text{また, } 4x^2 + 4xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, A の固有値 $5, 0$ に対する単位固有ベクトルは,
 それぞれ

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

である (A は対称行列であるから, 固有ベクトルは直交する).

このとき, 直交変換により, 次のように対角化される¹.

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2010.pdf> [5] 参照