

平成 17 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類, 二類, 三類) 数 I · II · III · A · B · C

問題 1 2 3 4 5 6

1 $x > 0$ に対し $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とする.

(1) $n = 1, 2, \dots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し, a_n, b_n に関する漸化式を求めよ.

(2) $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく. h_n を用いて a_n, b_n の一般項を求めよ.

2 $|z| > \frac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする. すなわち,

$$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leq \frac{5}{4} \right\}$$

とする. このとき, T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ.

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$$

とする. ただし, e は自然対数の底である.

(1) $x > \frac{1}{2}$ ならば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ であることを示せ.

(2) x_0 を正の数とすると, 数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, \dots$) を, $x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める. $x_0 > \frac{1}{2}$ であれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

であることを示せ.

4 3 以上 9999 以下の奇数 a で, $a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ.

5 N を 1 以上の整数とする. 数字 $1, 2, \dots, N$ が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙のふたりが次の手順でゲームを行う.

- (i) 甲が 1 枚カードをひく. そのカードに書かれた数を a とする. ひいたカードはもとに戻す.
- (ii) 甲はもう 1 回カードをひくかどうかを選択する. ひいた場合は, そのカードに書かれた数を b とする. ひいたカードはもとに戻す. ひかなかった場合は, $b = 0$ とする. $a + b > N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する.
- (iii) $a + b \leq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードをひく. そのカードに書かれた数を c とする. ひいたカードはもとに戻す. $a + b < c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する.
- (iv) $a + b \geq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードをひく. そのカードに書かれた数を d とする. $a + b < c + d \leq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする.

(ii) の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える. 以下の問いに答えよ.

- (1) 甲が 2 回目にカードをひかないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ.
- (2) 甲が 2 回目にカードをひくことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ.

ただし, 各カードがひかれる確率は等しいものとする.

6 r を正の実数とする. xyz 空間において

$$x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$y^2 + z^2 \geq r^2$$

$$z^2 + x^2 \leq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ より $f^{(1)}(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$
 $a_1 = 1, b_1 = -1$ とすると, $n = 1$ のとき

$$f^{(n)}(x) = \frac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}} \quad (*)$$

と表される. $(*)$ が自然数 n について成立するとき, $(*)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= a_n \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)' + b_n \left\{ \left(\frac{1}{x^{n+1}} \right)' \log x + \frac{1}{x^{n+1}} (\log x)' \right\} \\ &= -\frac{(n+1)a_n}{x^{n+2}} + b_n \left\{ -\frac{n+1}{x^{n+2}} \log x + \frac{1}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{x} \right\} \\ &= \frac{-(n+1)a_n + b_n - (n+1)b_n \log x}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

よって, 自然数 n について $(*)$ が成立する $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関する漸化式は

$$(**) \begin{cases} a_{n+1} = -(n+1)a_n + b_n, \\ b_{n+1} = -(n+1)b_n \end{cases}$$

(2) $(**)$ の第 2 式から

$$\frac{b_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{b_n}{(-1)^n n!} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{b_n}{(-1)^n n!} = \frac{b_1}{(-1) \cdot 1!}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{b_n}{(-1)^n n!} = 1 \quad \text{よって} \quad b_n = (-1)^n n!$$

これを $(**)$ の第 1 式に代入すると

$$a_{n+1} = -(n+1)a_n + (-1)^n n!$$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!} = \frac{a_n}{(-1)^n n!} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{a_{k+1}}{(-1)^{k+1}(k+1)!} - \frac{a_k}{(-1)^k k!} \right\} = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \quad (n > 1)$$

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!} + 1 = -(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = -(-1)^n n! h_n$$

上式は $n = 1$ のときも成立するから $a_n = -(-1)^n n! h_n$ ■

2 $w \in T$ のとき, 方程式 $z^2 - 2z = w$ の 2 解を α, β とすると, 条件より

$$|\alpha| \leq \frac{5}{4}, \quad |\beta| \leq \frac{5}{4} \quad (*)$$

また, 方程式 $z^2 - 2z - w = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -w \quad (**)$$

(*) および (**) の第 2 式から $|w| = |\alpha||\beta| \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

まず, $|w|$ の最大値を M とすると, $M \leq \frac{25}{16}$ を満たす.

次に, $M = \frac{25}{16}$ のとき

$$|\alpha| = |\beta| = \frac{5}{4}, \quad \alpha + \beta = 2 \quad (A)$$

を満たす α, β を示す. このとき $|\alpha| = |2 - \alpha| = \frac{5}{4}$

$$\alpha\bar{\alpha} = \alpha\bar{\alpha} - 2(\alpha + \bar{\alpha}) + 4 = \frac{25}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \bar{\alpha} = 2, \quad \alpha\bar{\alpha} = \frac{25}{16}$$

したがって, $\alpha, \bar{\alpha}$ を解する 2 次方程式は $X^2 - 2X + \frac{25}{16} = 0$

ゆえに $X = 1 \pm \frac{3}{4}i$ (A) より $(\alpha, \beta) = \left(1 \pm \frac{3}{4}i, 1 \mp \frac{3}{4}i\right)$ (複号同順)

このとき, (**) の第 2 式から $w = -\alpha\beta = -\frac{25}{16}$ ■

3 (1) $f(x) = \frac{1}{2}x\{1 + e^{-2(x-1)}\}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$x > \frac{1}{2}$ のとき, $f'(x) < \frac{1}{2}$ であるから, 上の増減表から

$$x > \frac{1}{2} \quad \text{ならば} \quad 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$$

(2) (1) の増減表から, $x \geq \frac{1}{2}$ で $f'(x) \geq 0$ より, $f(x)$ は単調増加.

$$x > \frac{1}{2} \implies f(x) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+e}{4} > \frac{1}{2}$$

平均値の定理により, 次式を満たす c_n が 1 と x_n の間に存在する.

$$x_{n+1} - 1 = f(x_n) - f(1) = f'(c_n)(x_n - 1)$$

(1) の結論より, $0 \leq f'(c_n) < \frac{1}{2}$ であるから

$$|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|x_n - 1|$$

$x_0 > \frac{1}{2}$ より, $|x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - 1|$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - 1| = 0 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

■

- 4 $a^2 - a = a(a - 1)$ について, a が奇数であるから, $a - 1$ は偶数. また, a と $a - 1$ は互いに素であるから, $a^2 - a$ が $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ で割り切れるとき

$$a = 5^4(2n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

とおける. このとき, $a - 1 = 1250n + 624$ が $2^4 = 16$ で割り切れるから

$$1250n + 624 \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad 2n \equiv 0 \pmod{16}$$

これを満たす n は $n = 0$ よって $a = 625$ ■

- 5 (1) 乙が勝つのは, 次の A, B のどちらかが成立する場合である.

A. (iii) で $a < c$

B. (iii) で $c \leq a$, (iv) で $a < c + d \leq N$

A が成立するとき, $c = a + 1, a + 2, \dots, N$ となる $N - a$ 通りであるから, その確率は

$$\frac{N - a}{N}$$

B が成立するとき, $c = k$ ($k = 1, 2, \dots, a$) に対し, $a + 1 - k \leq d \leq N - k$ であるから (d は $N - a$ 通り), その確率は

$$\sum_{k=1}^a \frac{1}{N} \cdot \frac{N - a}{N} = \frac{a(N - a)}{N^2}$$

したがって, 乙が勝つ確率は $\frac{N - a}{N} + \frac{a(N - a)}{N^2} = 1 - \frac{a^2}{N^2}$

よって, 甲が勝つ確率は $\frac{a^2}{N^2}$

- (2) 甲が2回目をひくとき, 甲が勝つには, $b = 1, 2, \dots, N - a$ であることが必要. このとき, (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N-a} \frac{1}{N} \cdot \frac{(a+b)^2}{N^2} &= \sum_{k=a+1}^N \frac{k^2}{N^3} = \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{N^3} - \sum_{k=1}^a \frac{k^2}{N^3} \\ &= \frac{1}{6N^3} \{N(N+1)(2N+1) - a(a+1)(2a+1)\} \end{aligned}$$
■

- 6 x を固定し, yz 平面に平行な断面積を S とする. 立体は yz 平面に関して対称であるから, $x \geq 0$ とする.

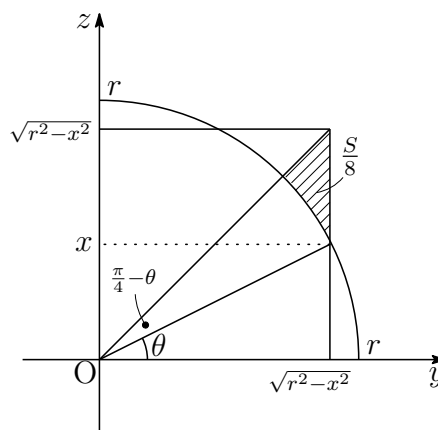
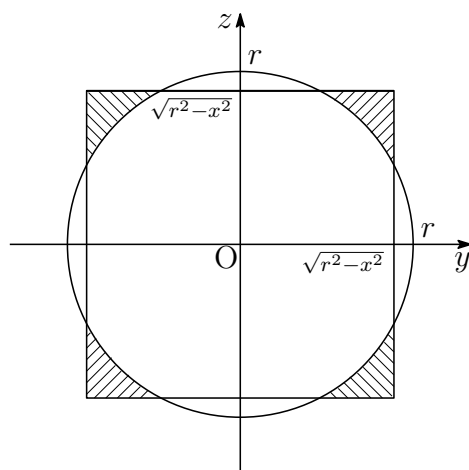
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq r^2 \\ x^2 + z^2 \leq r^2 \\ y^2 + z^2 \geq r^2 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \quad \begin{cases} y^2 \leq r^2 - x^2 \\ z^2 \leq r^2 - x^2 \\ y^2 + z^2 \geq r^2 \end{cases}$$

$$(*) \text{ より } r^2 - x^2 \geq 0, \quad (r^2 - x^2) + (r^2 - x^2) \geq r^2 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq x \leq \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$|y| \leq \sqrt{r^2 - x^2}, \quad |z| \leq \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y^2 + z^2 \geq r^2$$

このとき, 断面は左下の図の斜線部分であり, 対称性により右下の図の斜線部分の面積について, $x = r \sin \theta$ とおくと $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$

$$\begin{aligned} \frac{S}{8} &= \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - x^2} (\sqrt{r^2 - x^2} - x) - \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \\ S &= 4(r^2 - x^2 - x\sqrt{r^2 - x^2}) - 4r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \end{aligned}$$



求める立体の体積を V とすると $\frac{dx}{d\theta} = r \cos \theta$

x	$0 \rightarrow \frac{r}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} S dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} (r^2 - x^2 - x\sqrt{r^2 - x^2}) dx - 8r^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \cos \theta d\theta \\ &= 8 \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} - 8r^3 \left[\left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \sin \theta - \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3} \right) r^3 \end{aligned}$$

■