

平成 16 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理科 (一類, 二類, 三類) 数 I · II · III · A · B · C

問題 1 2 3 4 5 6

1 xy 平面の放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件をみたしている.

$\triangle PQR$ は一辺の長さ a の正三角形であり, 点 P, Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である.

このとき, a の値を求めよ.

2 自然数の 2 乗になる数を平方数という. 以下の問いに答えよ.

- (1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し, 10 の位の数 a , 1 の位の数 b とおいたとき, $a + b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ.
- (2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し, 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数, および 1 の位の数 4 つすべてが同じ数となるならば, その平方数は 10000 で割り切れることを示せ.

3 半径 10 の円 C がある. 半径 3 の円板 D を, 円 C に内接させながら, 円 C の円周に沿って滑ることなく転がす. 円板 D の周上の一点を P とする. 点 P が, 円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は, 円 C を 2 つの部分に分ける. それぞれの面積を求めよ.

4 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次のように定める.

$$f_1(x) = x^3 - 3x$$

$$f_2(x) = \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x)$$

$$f_3(x) = \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x)$$

以下同様に, $n \geq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば, 関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a を実数とする. $f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ.
- (2) a を実数とする. $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数を求めよ.
- (3) n を 3 以上の自然数とする. $f_n(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ.

- 5** r を正の実数とする． xyz 空間内の原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を A ，点 $P(r, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする．球 A と球 B の和集合の体積を V とする．ただし，球 A と球 B の和集合とは，球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである．

- (1) V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ．
- (2) $V = 8$ となるとき， r の値はいくらか．四捨五入して小数第 1 位まで求めよ．

注意：円周率 π は $3.14 < \pi < 3.15$ をみたまえ．

- 6** 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある．この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返す．

さいころを振り，出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し，3, 4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる．さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

- (1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．
- (2) 「白白白」から始めて， n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ．

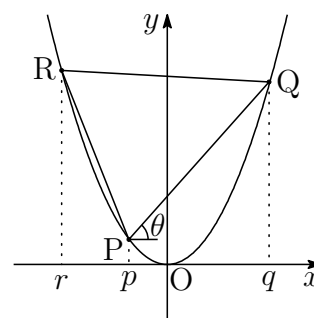
注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

解答例

- 1 放物線 $y = x^2$ 上の 3 点 P, Q, R の x 座標をそれぞれ p, q, r とする. 直線 PQ の偏角を θ とすると, 直線 PR, QR の偏角はそれぞれ $\theta + \frac{\pi}{3}, \theta - \frac{\pi}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}\tan\left(\theta \pm \frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \frac{\pi}{3}}{1 \mp \tan \theta \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{3}}{1 \mp \sqrt{2}\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{2} \pm \sqrt{3})(1 \pm \sqrt{6})}{(1 \mp \sqrt{6})(1 \pm \sqrt{6})} = \frac{-4\sqrt{2} \mp 3\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

(複号同順)



したがって, 直線 PR, QR の傾きは, それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{r^2 - p^2}{r - p} = r + p &= \frac{-4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{5} \\ \frac{r^2 - q^2}{r - q} = r + q &= \frac{-4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと $q - p = \frac{6\sqrt{3}}{5}$

$\tan \theta = \sqrt{2}$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) より, $\cos \theta > 0$ であるから

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } PQ = \frac{q - p}{\cos \theta} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{18}{5}$$

補足 直線 PQ の傾きから $p + q = \sqrt{2}$

これと上の結果を連立すると

$$p = \frac{5\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{10}, \quad q = \frac{5\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{10}, \quad r = -\frac{13}{10}\sqrt{2}$$

一般に, 放物線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線 AB の傾きは $f'\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ に等しい.

本題においても, 3 直線 PQ, QR, RP の傾きから, $\triangle PQR$ の 3 辺の中点の x 座標を求めることで, 3 点 P, Q, R の x 座標が求まる. ■

- 2** (1) 自然数 n は、整数 p と 0 以上 9 以下の整数 q を用いて

$$n = 10p + q \quad \text{ゆえに} \quad n^2 = 100p^2 + 2pq \cdot 10 + q^2$$

とおける. q^2 の 1 の位が b であり, 10 の位を r とすると

$$a \equiv 2pq + r \pmod{10} \quad \text{ゆえに} \quad a \equiv r \pmod{2}$$

したがって $a + b \equiv r + b \pmod{2}$

すなわち, $r + b$ が偶数 (q^2 の各位の和が偶数) となる b を求めればよい.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
r	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8
b	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

よって, 上の表から, $q = 0, 2, 8$ のときで **$b = 0, 4$**

- (2) 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数, および 1 の位の数 の 4 つすべてが同じ数であるから, 10 の位の数と 1 の位の数 の和が偶数の平方数であるから, (1) の結論からその下 4 桁は 0000 または 4444 である.

- (i) 下 4 桁が 0000 であるとき, 明らかに 10000 で割り切れる.
(ii) 下 4 桁が 4444 であるとき, 平方数は自然数 k を用いて

$$10^4 k + 4444 = 4(2500k + 1111) \quad \cdots (*)$$

とかける. $2500k + 1111$ も平方数で下 2 桁「11」の数の和が偶数であるから, このとき, (1) の結論による 1 の位が「0」または「4」であることに反する. したがって, (*) は平方数ではない.

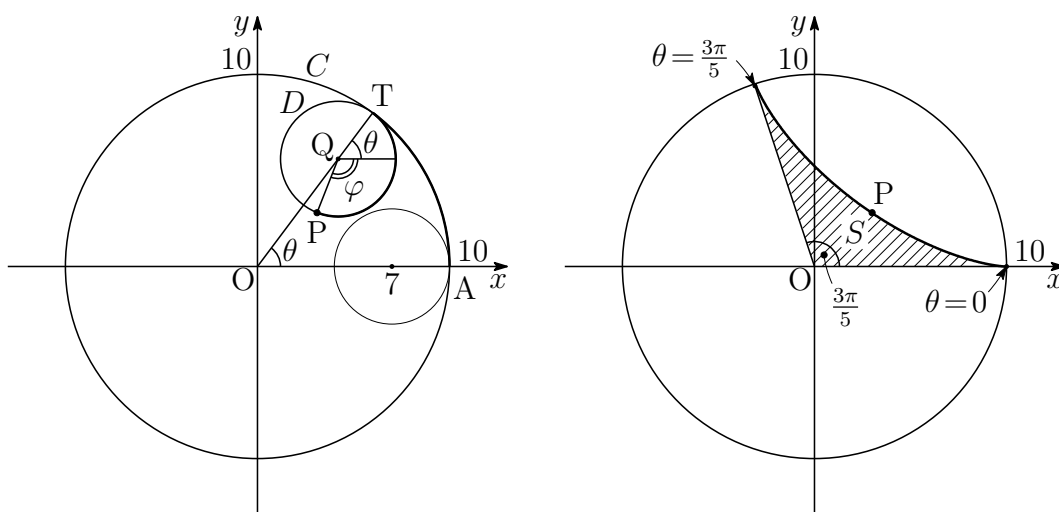
- (i), (ii) から, 平方数の下 4 桁が 0000 ならば, 10000 で割り切れる. ■

- 3** 左下の図のように D の中心を Q , C と D の接点を T とし, 点 P が点 $A(10, 0)$ から D 上を φ だけ回転したとき, $\theta = \angle AOQ$ とすると, C 上の $\widehat{AT}$ と D 上の $\widehat{PT}$ が等しいから

$$10\theta = 3(\theta + \varphi) \quad \text{ゆえに} \quad \varphi = \frac{7}{3}\theta$$

再び点 P が C に接するとき, $\theta + \varphi = 2\pi$ であるから

$$\theta + \frac{7}{3}\theta = 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{3\pi}{5}$$



このとき $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = 7 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) \end{pmatrix}$

$P(x, y)$ とすると $x = 7 \cos \theta + 3 \cos \frac{7}{3}\theta, \quad y = 7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta$

右上の図の斜線部分の面積を S とすると $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left(x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y \right) d\theta$

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y &= \left(7 \cos \theta + 3 \cos \frac{7}{3}\theta \right) \cdot 7 \left(\cos \theta - \cos \frac{7}{3}\theta \right) \\ &\quad + 7 \left(\sin \theta + \sin \frac{7}{3}\theta \right) \cdot \left(7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta \right) \\ &= 49(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 21 \left(\sin^2 \frac{7}{3}\theta + \cos^2 \frac{7}{3}\theta \right) \\ &\quad - 28 \left(\cos \frac{7}{3}\theta \cos \theta - \sin \frac{7}{3}\theta \sin \theta \right) \\ &= 28 - 28 \cos \frac{10}{3}\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{したがって} \quad S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{5}} \left(28 - 28 \cos \frac{10}{3} \theta \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[28\theta - \frac{42}{5} \sin \frac{10}{3} \theta \right]_0^{\frac{3\pi}{5}} = \frac{42}{5} \pi
 \end{aligned}$$

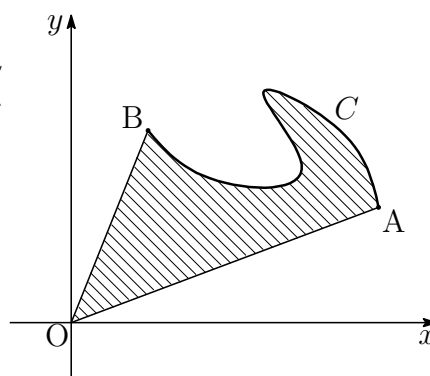
小さい部分の面積を S_1 , 大きい部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot \frac{3\pi}{5} - S = 30\pi - \frac{42}{5} \pi = \frac{108}{5} \pi \\
 S_2 &= \pi \cdot 10^2 - S_1 = 100\pi - \frac{108}{5} \pi = \frac{392}{5} \pi
 \end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
 について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で
 囲まれた部分の面積を S とすると
 (OB の偏角 $>$ OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



例 曲線 $x = a \cos^3 \theta, y = b \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で囲まれた部分の面積 S

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{4} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} y \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^3 \theta \cdot 3b \sin^2 \theta \cos \theta + 3a \cos^2 \theta \sin \theta \cdot b \sin^3 \theta) d\theta \\
 &= \frac{3}{2} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) d\theta \\
 &= \frac{3}{8} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3}{16} ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta) d\theta \\
 &= \frac{3}{16} ab \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3ab}{32} \pi
 \end{aligned}$$

よって
$$S = \frac{3ab}{8} \pi$$

補足 ガウス・グリーンの定理を用いると, 被積分関数が簡単になる場合が多い.

別解 媒介変数曲線 $x = 7 \cos \theta + 3 \cos \frac{7}{3}\theta$, $y = 7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta$ の対称性に着目する.

$\theta = \frac{3}{10}\pi$ のとき, 点 $P(a, b)$ とすると

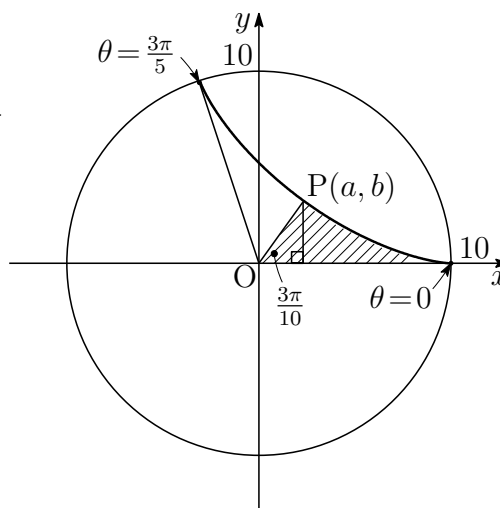
$$a = 7 \cos \frac{3}{10}\pi + 3 \cos \frac{7}{10}\pi = 4 \cos \frac{3}{10}\pi$$

$$b = 7 \sin \frac{3}{10}\pi - 3 \sin \frac{7}{10}\pi = 4 \sin \frac{3}{10}\pi$$

$$\frac{1}{2}ab = 8 \sin \frac{3}{10}\pi \cos \frac{3}{10}\pi = 4 \sin \frac{3}{5}\pi$$

x	$a \rightarrow 10$
θ	$\frac{3\pi}{10} \rightarrow 0$

$$\frac{dx}{d\theta} = -7 \left(\sin \theta + \sin \frac{7}{3}\theta \right) \text{ より}$$



$$\begin{aligned} \int_a^{10} y dx &= \int_{\frac{3}{10}\pi}^0 \left(7 \sin \theta - 3 \sin \frac{7}{3}\theta \right) \cdot (-7) \left(\sin \theta + \sin \frac{7}{3}\theta \right) d\theta \\ &= 7 \int_0^{\frac{3}{10}\pi} \left(7 \sin^2 \theta - 3 \sin^2 \frac{7}{3}\theta + 4 \sin \frac{7}{3}\theta \sin \theta \right) d\theta \\ &= \frac{49}{2} \int_0^{\frac{3}{10}\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta - \frac{21}{2} \int_0^{\frac{3}{10}\pi} \left(1 - \cos \frac{14}{3}\theta \right) d\theta \\ &\quad + 14 \int_0^{\frac{3}{10}\pi} \left(\cos \frac{4}{3}\theta - \cos \frac{10}{3}\theta \right) d\theta \\ &= \frac{49}{2} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} - \frac{21}{2} \left[\theta - \frac{3}{14} \sin \frac{14}{3}\theta \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\ &\quad + 14 \left[\frac{3}{4} \sin \frac{4}{3}\theta - \frac{3}{10} \sin \frac{10}{3}\theta \right]_0^{\frac{3}{10}\pi} \\ &= \frac{21}{5}\pi - 4 \sin \frac{3}{5}\pi \end{aligned}$$

したがって $\frac{S}{2} = \frac{1}{2}ab + \int_a^{10} y dx = \frac{21}{5}\pi$

以下, 前ページと同様. ■

- 4 (1) $f_1(x) = x^3 - 3x$ より

$$f_1'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

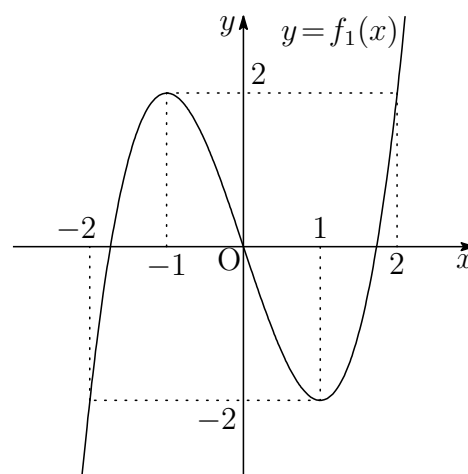
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

$f_1(x) = a$ をみたす実数 x の個数は

$$|a| < 2 \text{ のとき } 3 \text{ 個}$$

$$|a| = 2 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$|a| > 2 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$



- (2) まず, 2つの3次方程式

$$f_1(x) - \alpha = 0, \quad f_1(x) - \beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta, |\alpha| < 2, |\beta| < 2)$$

が共通解 k をもつと仮定すると

$$f_1(k) - \alpha = 0, \quad f_1(k) - \beta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \beta$$

仮定に反するから, $f_1(x) - \alpha = 0, f_1(x) - \beta = 0$ は共通解をもたない.

(1) で示したグラフから, $f_1(x) = a$ の解について, 次のようになる.

- (i) $|a| < 2$ のとき, $f_1(x) = a$ の異なる3つの実数解を x_1, x_2, x_3 とすると, $|x_1| < 2, |x_2| < 2, |x_3| < 2$ をみtas.

$$f_2(x) - a = \{f_1(x) - x_1\}\{f_1(x) - x_2\}\{f_1(x) - x_3\} = 0 \quad (*)$$

このとき, $f_1(x) - x_1 = 0, f_1(x) - x_2 = 0, f_1(x) - x_3 = 0$ はそれぞれ異なる3つの実数解をもち, 共通解はもたないから, 方程式(*)は9個の実数解をもつ.

- (ii) $a = 2$ のとき, $f_1(x) - 2 = (x+1)^2(x-2)$ より

$$f_2(x) - 2 = \{f_1(x) + 1\}^2\{f_1(x) - 2\} = 0$$

$\{f_1(x) + 1\}^2 = 0$ の実数解は3個, $f_1(x) - 2 = 0$ の実数解は2個で, 共通解はない. したがって, $f_2(x) = 2$ の実数解は5個

- (iii) $a = -2$ のとき, $f_1(x) + 2 = (x-1)^2(x+2)$ より

$$f_2(x) + 2 = \{f_1(x) - 1\}^2\{f_1(x) + 2\} = 0$$

$\{f_1(x) - 1\}^2 = 0$ の実数解は3個, $f_1(x) + 2 = 0$ の実数解は2個で, 共通解はない. したがって, $f_2(x) = -2$ の実数解は5個

(iv) $|a| > 2$ のとき, $f_1(x) = a$ をみたすただ 1 つの実数解を x_4 とすると, $|x_4| > 2$. さらに, $f_1(x) = x_4$ をみたす実数解 x_5 がただ 1 つ存在する ($|x_5| > 2$). よって, $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = a$ をみたす実数解は 1 個.

(i)~(iv) より, $f_2(x) = a$ をみたす実数 x の個数は

$|a| < 2$ のとき 9 個

$|a| = 2$ のとき 5 個

$|a| > 2$ のとき 1 個

(3) (2)(i) の議論と同様に

$$f_n(x) = f_{n-1}(x)\{f_{n-1}(x) - \sqrt{3}\}\{f_{n-1}(x) + \sqrt{3}\} \quad (**)$$

$|c| < 2$ に対し, k を自然数とすると

$$f_{k+1}(x) - c = \{f_k(x) - d_1\}\{f_k(x) - d_2\}\{f_k(x) - d_3\} \\ (|d_1| < 2, |d_2| < 2, |d_3| < 2)$$

を満たす互いに異なる実数 d_1, d_2, d_3 が存在する.

これを順次 (**) に適用すると, 次式を得る.

$$f_n(x) = (x - e_1)(x - e_2) \cdots (x - e_{3^n}) \\ (|e_1| < 2, |e_2| < 2, \dots, |e_{3^n}| < 2)$$

このとき, $e_1, e_2, \dots, e_{3^n}$ は互いに異なる.

よって, $f_n(x) = 0$ をみたす実数 x の個数は 3^n である.

補足 $f_1(x) = x^3 - 3x$ について, $x = 2 \cos \theta$ とおくと

$$f_1(2 \cos \theta) = 2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = 2 \cos 3\theta \\ f_2(2 \cos \theta) = f_1(f_1(2 \cos \theta)) = f_1(2 \cos 3\theta) = 2 \cos 3^2 \theta \\ \vdots \\ f_n(2 \cos \theta) = 2 \cos 3^n \theta$$

$-2 \leq a \leq 2$ に対し, $a = 2 \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) とすると

$$3^n \theta = \varphi + 2m\pi \quad \text{ゆえに} \quad \theta = \frac{\varphi + 2m\pi}{3^n} \quad (m \text{ は整数})$$

よって, $f_n(x) = a$ の解は $x = 2 \cos \frac{\varphi + 2m\pi}{3^n}$

とくに, $f_n(x) = 0$ の解は, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ より

$$x = 2 \cos \frac{1}{3^n} \left(\frac{1}{2} + 2m \right) \pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 3^n - 1)$$



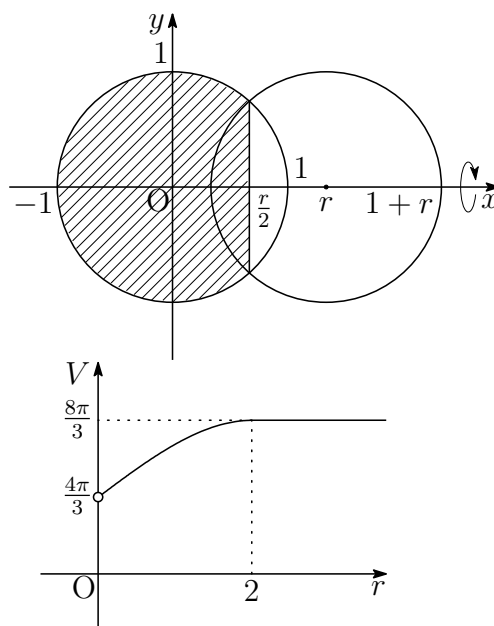
5 (1) $0 < r \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_{-1}^{\frac{r}{2}} (1 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{r}{2}} \\ &= \frac{\pi}{12} (-r^3 + 12r + 16) \\ \frac{dV}{dr} &= -\frac{\pi}{4} (r + 2)(r - 2) \end{aligned}$$

r	(0)	$\dots$	2
$\frac{dV}{dr}$		+	
V	$\left(\frac{4\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	$\frac{8\pi}{3}$

$$r > 2 \text{ のとき } V = 2 \times \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{よって } V = \begin{cases} \frac{\pi}{12}(-r^3 + 12r + 16) & (0 < r \leq 2) \\ \frac{8}{3}\pi & (r > 2) \end{cases}$$



(2) $8 < \frac{8}{3}\pi$ であるから, $V = 8$ となる r ($0 < r < 2$) がただ 1 つ存在する.

$$\frac{\pi}{12}(-r^3 + 12r + 16) = 8 \quad \text{ゆえに} \quad -r^3 + 12r = \frac{96}{\pi} - 16 \quad (*)$$

$3.14 < \pi < 3.15$ より, $\frac{96}{3.15} - 16 < \frac{96}{\pi} - 16 < \frac{96}{3.14} - 16$ であるから

$$14 + \frac{10}{21} < \frac{96}{\pi} - 16 < 14 + \frac{90}{157}$$

$f(r) = -r^3 + 12r$ とおくと, $V = \frac{\pi}{12}\{f(r) + 16\}$ であるから, $0 < r < 2$ において $f(r)$ は単調増加

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 12 \cdot \frac{3}{2} = 14 + \frac{5}{8} = 14 + \frac{90}{144} > 14 + \frac{90}{157}$$

$0 < k < \frac{3}{2}$ に対して

$$f\left(\frac{3}{2} - k\right) = 14 + \frac{5}{8} - \frac{21}{4}k - k^2\left(\frac{9}{2} - k\right) < 14 + \frac{5}{8} - \frac{21}{4}k$$

$$k = \frac{1}{20} \text{ のとき } f\left(\frac{29}{20}\right) < 14 + \frac{5}{8} - \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{20} = 14 + \frac{29}{80} < 14 + \frac{10}{21}$$

$$\text{ゆえに } f\left(\frac{29}{20}\right) < \frac{96}{\pi} - 16 < f\left(\frac{3}{2}\right) \quad (*) \text{ より, 求める } r \text{ は } \mathbf{1.5} \quad \blacksquare$$

- 6** (1) サイコロを振り，出た目が「1, 2」「3, 4」「5, 6」である確率をそれぞれ p, q, r とすると

$$p = q = r = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

求める確率は

$$p^3 + \frac{3!}{1!2!}pq^2 + \frac{3!}{1!2!}pr^2 = \frac{1}{27} + \frac{3}{27} + \frac{3}{27} = \frac{7}{27}$$

- (2) 色の並びが「白白白」となるのは，偶数回目に限る．また，偶数回目においては白が3つまたは白が1つだけある．

k を整数とし， $2k$ 回目で「白白白」であるとき， $2k+2$ 回目で「白白白」となる条件付き確率は

$$p^2 + q^2 + r^2 = \frac{1}{3}$$

$2k$ 回目で「白黒黒」であるとき， $2k+2$ 回目で「白白白」となる条件付き確率は

$$\frac{2!}{1!1!}qr = \frac{2}{9}$$

同様に $2k$ 回目で「黒白白」および「黒黒白」であるときも， $2k+2$ 回目で「白白白」となる条件付き確率は，ともに $\frac{2}{9}$

したがって， $n = 2k$ 回目で「白白白」となる確率を p_k とすると，次の確率漸化式が成立する

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{2}{9}(1 - p_k) \quad \text{ゆえに} \quad p_{k+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(p_k - \frac{1}{4}\right)$$

$$p_0 = 1 \text{ より } p_k - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k \quad \text{ゆえに} \quad p_k = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^{2k}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^n}$$

色の並びが「白黒白」となるのは，奇数回目に限る． $n = 2k+1$ とすると， $2k$ 回目において，「白白白」，「黒黒白」，「白黒黒」であるから，対等性に注意すると， n 回目に「白黒白」となる確率は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(1 - p_k) \times 2 &= \frac{2}{9} + \frac{1}{9}p_k = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^{2k}}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^{2k+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$\frac{1 + (-1)^n}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^n} \right) + \frac{1 - (-1)^n}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^n} \right) = \frac{1}{4} + \frac{2 + (-1)^n}{4 \cdot 3^n}$$

補足 偶数のとき $\frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 3^n}$ ，奇数のとき $\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 3^n}$ と解答してもよい。 ■