

平成13年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類, 二類, 三類) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 半径 r の球面上に4点 A, B, C, D がある. 四面体 $ABCD$ の各辺の長さは, $AB = \sqrt{3}$, $AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている. このとき r の値を求めよ.

- 2 次の等式を満たす関数 $f(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) がただ一つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ. また, そのときの $f(x)$ を決定せよ.

$$f(x) = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y)f(y) dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y)f(y) dy \\ + \sin x + \cos x$$

ただし, $f(x)$ は区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ で連続な関数とする.

- 3 実数 $t > 1$ に対し, xy 平面上の点

$$O(0, 0), \quad P(1, 1), \quad Q\left(t, \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP , OQ と双曲線 $xy = 1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする. このとき

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと, 関数 $c(t)$ は $t > 1$ においてつねに減少することを示せ.

- 4 複素数平面上の点 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = i, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく. ただし, i は虚数単位である.

- (1) 3点 b_1, b_2, b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ.
(2) すべての点 b_n ($n = 1, 2, \dots$) は円 C の周上にあることを示せ.

- 5** 容量 1 リットルの m 個のビーカー (ガラス容器) に水が入っている. $m \geq 4$ から空のビーカーは無い. 入っている水の総量は 1 リットルである. また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり, その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない.

このとき, 水の入っているビーカーが 2 個になるまで, 次の (a) から (c) までの操作を, 順に繰り返す.

- (a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ.
- (b) さらに, 残りのビーカーの中から, 入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ.
- (c) 次に, (a) で選んだビーカーの水を (b) で選んだビーカーにすべて移し, 空になったビーカーを取り除く.

この操作の過程で, 入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは, そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする.

- (1) $x < \frac{1}{3}$ のとき, 最初に x リットルの水が入ったビーカーは, 操作の途中で空になって取り除かれるか, または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ.
- (2) $x > \frac{2}{5}$ のとき, 最初に x リットルの水の入ったビーカーは, 最後まで x リットルの水が入ったまま残ることを証明せよ.

- 6 コインを投げる試行の結果によって、数直線上にある2点 A, B を次のように動かす.

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に1動かす. そうでないときは、 A のみ正の方向に1動かす.

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは、 A と B を共に正の方向に1動かす. そうでないときは、 B のみ正の方向に1動かす.

最初2点 A, B は原点にあるものとし、上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果、 A, B の到達した座標をそれぞれ a, b とする.

- (1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち、 $a = b$ となる場合の数を X_n とおく. X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ.
- (2) X_n を求めよ.
- (3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ.

解答例

1 2 辺 CD, AB の中点をそれぞれ M, N とし, 球の中心を O とする.

BC = BD より $\triangle BCM \equiv \triangle BDM$, AC = AD より $\triangle ACM \equiv \triangle ADM$

ゆえに, 平面 ABM は辺 CD の垂直二等分面で, O はこの平面上にある.

AC = BC より $\triangle ACN \equiv \triangle BCN$, AD = BD より $\triangle ADN \equiv \triangle BDN$

ゆえに, 平面 CDN は辺 AB の垂直二等分面で, O はこの平面上にある.

したがって, O は平面 ABM と平面 CDN の交線 MN 上にある.

また, OB = OC = OD であるから, O から平面 BCD に垂線 OH を引くと

$\triangle OBH \equiv \triangle OCH \equiv \triangle ODH$ ゆえに H は $\triangle BCD$ の外心

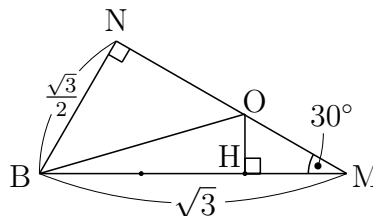
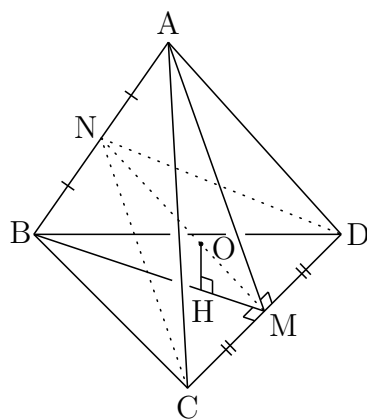
BC = BD = CD = 2 より, $\triangle BCD$ は正三角形であるから, H はその重心で,
H は BM を 2 : 1 に内分する.

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

AB = AM = BM = $\sqrt{3}$ であるから, $\triangle ABM$ は正三角形で, $\angle BMN = 30^\circ$

$$OH = MH \tan 30^\circ = \frac{1}{3}BM \tan 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } r = OB = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$



2 まず, 定数 M, N を

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos y \, dy, \quad N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin y \, dy$$

とおくと, 与えられた等式は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(x+y) f(y) \, dy + \frac{b}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x-y) f(y) \, dy \\ &\quad + \sin x + \cos x \\ &= a(M \sin x + N \cos x) + b(M \cos x + N \sin x) + \sin x + \cos x \\ &= (aM + bN + 1) \sin x + (aN + bM + 1) \cos x \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} = \pi, \\ \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \left[\sin^2 x \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos y \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(aM + bN + 1) \sin y + (aN + bM + 1) \cos y\} \cos y \, dy \\ &= \frac{1}{2} (aN + bM + 1), \\ N &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin y \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(aM + bN + 1) \sin y + (aN + bM + 1) \cos y\} \sin y \, dy \\ &= \frac{1}{2} (aM + bN + 1) \end{aligned}$$

上の2式から $(b-2)M + aN = -1, \quad aM + (b-2)N = -1$

整理すると $\{(b-2)^2 - a^2\}M = \{(b-2)^2 - a^2\}N = a - b + 2$

よって, 求める条件は $(b-2)^2 - a^2 \neq 0$ すなわち $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b} - \mathbf{2}|$

条件を満たすとき

$$M = N = \frac{a - b + 2}{(b-2)^2 - a^2} = \frac{-(b-2-a)}{(b-2+a)(b-2-a)} = \frac{1}{2-a-b}$$

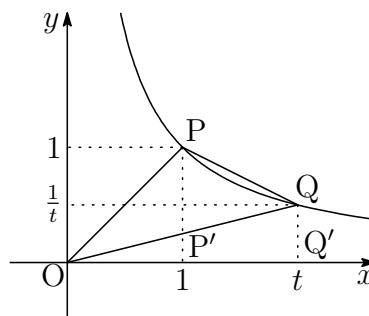
このとき, (*) の係数について

$$aM + bN + 1 = aN + bM + 1 = \frac{a}{2-a-b} + \frac{b}{2-a-b} + 1 = \frac{2}{2-a-b}$$

よって $f(x) = \frac{2}{2-a-b}(\sin x + \cos x)$ ■

- 3** O(0, 0), P(1, 1), Q($t, \frac{1}{t}$) を頂点する
△OPQ の面積 $a(t)$ は ($t > 1$)

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{1}{t} - 1 \cdot t \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{t} - t \right| = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$



線分 OP, OQ と双曲線 $y = \frac{1}{x}$ とで囲まれた部分の面積 $b(t)$ は

$$\begin{aligned} b(t) &= \triangle OPP' + \int_1^t \frac{dx}{x} - \triangle OQQ' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \left[\log x \right]_1^t - \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{1}{t} = \log t \end{aligned}$$

$$c(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \text{ より } c'(t) = \frac{b'(t)a(t) - b(t)a'(t)}{a(t)^2} \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} b'(t)a(t) - b(t)a'(t) &= \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) - (\log t) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \\ &= \frac{1}{2t^2} \{ (t^2 - 1) - (t^2 + 1) \log t \} \\ &= \frac{t^2 + 1}{2t^2} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \log t \right) \quad \dots (**) \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} - \log t = 1 - \frac{2}{t^2 + 1} - \log t \text{ とおくと}$$

$$f'(t) = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} - \frac{1}{t} = \frac{4t^2 - (t^2 + 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} = -\frac{(t + 1)^2(t - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2}$$

$f(1) = 0$, $t > 1$ のとき $f'(t) < 0$ であるから, $t > 1$ で $f(t) < 0$

(*), (**) より, $t > 1$ で $c'(t) < 0$, すなわち, $c(t)$ は単調減少である. ■

- 4 (1) 与えられた漸化式より $a_1 = 1, a_2 = i, a_3 = 1 + i, a_4 = 1 + 2i$

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = i, \quad b_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{1+i}{i} = 1 - i, \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

円 C の中心を $x + yi$ とおくと (x, y は実数)

$$\begin{aligned} |x + yi - i| &= |x + yi - (1 - i)| = \left| x + yi - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| \\ |x + (y - 1)i| &= |(x - 1) + (y + 1)i| = \left| \left(x - \frac{3}{2} \right) + \left(y - \frac{1}{2} \right) i \right| \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 1)^2 &= (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \\ -2y + 1 &= -2x + 2y + 2 = -3x - y + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

これを解いて $x = \frac{1}{2}, y = 0$

よって C の中心は $\frac{1}{2}$, 半径は $\left| \frac{1}{2} - i \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- (2) 与えられた漸化式から

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{b_n} \quad (*)$$

b_n が C 上にあることを数学的帰納法で示す.

[1] $n = 1$ のとき, b_1 は (1) で示したとおり, C 上の点である.

[2] $n = k$ のとき, b_k が C の点であるとき $\left| b_k - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(*) より, $b_k = \frac{1}{b_{k+1} - 1}$ であるから, これを上式に代入すると

$$\left| \frac{1}{b_{k+1} - 1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |3 - b_{k+1}| = \sqrt{5}|b_{k+1} - 1|$$

したがって $9 - 3(b_{k+1} + \overline{b_{k+1}}) + |b_{k+1}|^2 = 5(|b_{k+1}|^2 - b_{k+1} - \overline{b_{k+1}} + 1)$

整理すると $4|b_{k+1}|^2 - 2(b_{k+1} + \overline{b_{k+1}}) = 4$ ゆえに $\left| b_{k+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

したがって, b_{k+1} は C 上の点である.

よって, すべての点 b_n ($n = 1, 2, \dots$) は円 C の周上にある.

別解 漸化式(*)の特性方程式は

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 1 = 0$$

この2次方程式の2つ解を α, β とすると ($\alpha > \beta$)

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}, \quad \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \alpha = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha - b_n}{\alpha b_n} \quad \text{同様に} \quad b_{n+1} - \beta = \frac{\beta - b_n}{\beta b_n}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\alpha - b_{n+1}}{\beta - b_{n+1}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} \quad \dots (**)$$

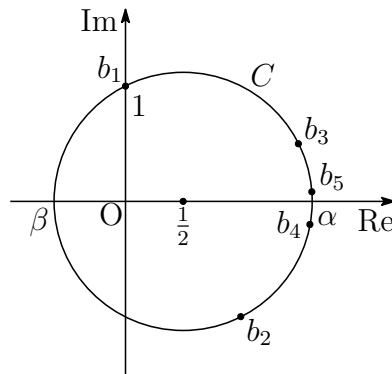
$$\arg \frac{\alpha - b_{n+1}}{\beta - b_{n+1}} = \arg \frac{\beta}{\alpha} + \arg \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n}$$

$$C \text{ は2点 } \alpha, \beta \text{ を直径の両端とする円であるから} \quad \arg \frac{\alpha - b_1}{\beta - b_1} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \text{ は負の実数であるから} \quad \arg \frac{\beta}{\alpha} = \pi$$

$$\arg \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} = \frac{\pi}{2} + (n-1)\pi$$

よって, b_n は, 2点 α, β を直径の両端とする円 C の周上にある.



$$\text{補足} \quad \text{また, } (**) \text{ より} \quad \frac{\alpha - b_n}{\beta - b_n} = \frac{\alpha - b_1}{\beta - b_1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{n-1}$$

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

なお, b_n の極限が c に収束するとき, c は特性方程式の解である. ■

5 (1) (背理法を用いる)

x リットルの水が入ったビーカーを X とする. X は操作の途中で空にもならず水の量が増えることもない, すなわち, 最後まで X は操作されることがないと仮定する. 水の入ったビーカーが 3 個残っている時点で, X 以外の 2 つビーカーが操作の対象となり, これら 2 つのビーカーに入っている水の量はともに x リットル以下である. このとき, 3 個ビーカーに入っている水の総量は $3x$ リットル以下である. $x < \frac{1}{3}$ のとき, $3x < 1$ となり, 水の総量が 1 リットル未満となり, 矛盾.

(2) (背理法を用いる)

水が入っているビーカーの個数が k である状態を S_k とし, 途中 X が操作の対象となると仮定する.

$S_k (k \geq 4)$ で, X が操作の対象となると, x リットル以上入っているビーカーが, X 以外に少なくとも 2 つあり, これら 2 つと X を含めた水の量は $3x$ リットル以上となる. $x > \frac{2}{5}$ のとき, $3x > \frac{6}{5} > 1$ となり, 矛盾.

これから, X が操作の対象となるのは, S_3 の状態に限る.

このとき, X 以外の残り 2 個のビーカーを Y, Z とし, それぞれ y リットル, z リットルの水が入っていて, 一般性を失うことなく $y \leq z$ とする.

S_3 で X が操作の対象となるのは, 次の (i), (ii) の場合である.

(i) $x \leq y \leq z$ の場合

$$x > \frac{2}{5} \text{ のとき } x + y + z \geq 3x > \frac{6}{5} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{矛盾}$$

(ii) $y \leq x \leq z$ の場合

$x > \frac{2}{5}$ による仮定は, $z \geq x > \frac{2}{5}$ より, Z についても適用される. すなわち, Z も操作の対象であり, S_4 の状態で

$$z = z_1 + z_2, \quad z_1 \leq z_2 \leq y \leq x \leq z$$

の操作が行われている. このとき

$$x \leq z = z_1 + z_2 \leq 2z_2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{2} \leq z_2 \leq y, \quad x \leq z$$

$$x > \frac{2}{5} \text{ のとき } y + x + z \geq \frac{5}{2}x > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{矛盾.}$$

(i), (ii) より, 本命題は成立する. ■

- 6** (1) n 回コインを投げたとき, $a > b$ となる場合の数を A_n , $a < b$ となる場合の数を B_n とする. ルールにより

$$\text{表} \begin{cases} a > b \cdots \text{両方} + 1 \\ a \leq b \cdots a \text{ だけ} + 1 \end{cases} \quad \text{裏} \begin{cases} b > a \cdots \text{両方} + 1 \\ b \leq a \cdots b \text{ だけ} + 1 \end{cases}$$

したがって, n 回コインを投げた時点で

$$a = b + 1, \quad a = b, \quad a = b - 1$$

のいずれかであり, それぞれの場合の個数を A_n, X_n, B_n とする. このとき, 次の漸化式が成立する.

$$(*) \begin{cases} X_1 = 0, A_1 = 1, B_1 = 1, \\ X_{n+1} = A_n + B_n, \\ A_{n+1} = A_n + X_n, \\ B_{n+1} = B_n + X_n \end{cases}$$

$X_n + A_n + B_n = 2^n$ より, $(*)$ の第 3 式と第 4 式の辺々を加えると

$$A_{n+1} + B_{n+1} = X_n + (X_n + A_n + B_n)$$

$$\text{ゆえに } 2^{n+1} - X_{n+1} = X_n + 2^n \quad \text{よって} \quad X_{n+1} = 2^n - X_n$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } X_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{3} = - \left(X_n - \frac{2^n}{3} \right)$$

$$\text{ゆえに } X_n - \frac{2^n}{3} = (-1)^{n-1} \left(X_1 - \frac{2}{3} \right) \quad \text{よって} \quad X_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}(-1)^n$$

別解 $X_n = (-1)^n x_n$ とおくと $x_1 = 0, \quad x_{n+1} - x_n = -(-2)^n$

$$n > 1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = - \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^k$$

$$\text{したがって } x_n = \frac{2\{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}\{2 + (-2)^n\}$$

$$\text{上式は, } n = 1 \text{ のときも成立するから } X_n = \frac{1}{3}\{2(-1)^n + 2^n\}$$

(3) (*) の第 3 式と第 4 式の差をとると $A_{n+1} - B_{n+1} = A_n - B_n$

$A_1 - B_1 = 0$ より, $A_n = B_n$ であるから, これを (*) の第 2 式に代入して

$$A_n = B_n = \frac{1}{2}X_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2^{n+1}}{3} + \frac{2}{3}(-1)^{n+1} \right\} = \frac{2^n}{3} - \frac{1}{3}(-1)^n$$

k 回目の試行において, a の目が増える確率は

- $a = b$ (X の状態) のとき: 表が出れば a のみ +1, 裏が出れば b のみ +1 なので, a が増える確率は $\frac{1}{2}$.
- $a > b$ (A の状態) のとき: 表が出れば両方 +1, 裏が出れば b のみ +1 なので, a が増える確率は $\frac{1}{2}$.
- $a < b$ (B の状態) のとき: 表が出れば a のみ +1, 裏が出れば両方 +1 なので, どちらが出ても必ず a が増え, 確率は 1.

k 回目の試行において, a の目が増える期待値を $E(k)$ とすると

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{X_{k-1}}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{A_{k-1}}{2^{k-1}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{B_{k-1}}{2^{k-1}} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2^k} (X_{k-1} + A_{k-1} + 2B_{k-1}) \end{aligned}$$

$X_{k-1} = \frac{2^{k-1}}{3} - \frac{2}{3}(-1)^k$, $A_{k-1} = B_{k-1} = \frac{2^{k-1}}{3} + \frac{1}{3}(-1)^k$ であるから

$$E(k) = \frac{1}{2^k} \left\{ \frac{2^{k+1}}{3} + \frac{1}{3}(-1)^k \right\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^k$$

よって, 求める a の値の平均は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n E(k) &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right)^k \right\} \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} \\ &= \frac{2}{3}n - \frac{1}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

