

平成 26 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 以下の問いに答えよ.

(1) t を実数の定数とする. 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$$

と定める. このとき, 関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ.

(2) (1) の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする. t が $t \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき, $g(t)$ の最小値を求めよ.

2 a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする.

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して, 次の操作 (*) を考える.

(*) 袋 U から球を 1 個取り出し,

(i) 取り出した球が白球のときは, 袋 U の中身が白球 a 個, 赤球 1 個となるようにする.

(ii) 取り出した球が赤球のときは, その球を袋 U へ戻すことなく, 袋 U の中身はそのままにする.

はじめに袋 U の中に, 白球が $a + 2$ 個, 赤球が 1 個入っているとする. この袋 U に対して操作 (*) を繰り返し行う.

たとえば, 1 回目の操作で白球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個, 赤球 1 個となり, さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると, 袋 U の中身は白球 a 個のみとなる.

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする. ただし, 袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする.

(1) p_1, p_2 を求めよ.

(2) $n \geq 3$ に対して p_n を求めよ.

3 座標平面の原点を O で表す.

線分 $y = \sqrt{3}x$ ($0 \leq x \leq 2$) 上の点 P と, 線分 $y = -\sqrt{3}x$ ($-3 \leq x \leq 0$) 上の点 Q が, 線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く. このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする.

- (1) s を $-3 \leq s \leq 2$ をみたす実数とすると, 点 (s, t) が D に入るような t の範囲を求めよ.
- (2) D を図示せよ.

4 r を 0 以上の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = r, \quad a_2 = r + 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また, 素数 p を 1 つとり, a_n を p で割った余りを b_n とする. ただし, 0 を p で割った余りは 0 とする.

- (1) 自然数 n に対し, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ.
- (2) $r = 2, p = 17$ の場合に, 10 以下のすべての自然数 n に対して, b_n を求めよ.
- (3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して,

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0, \quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする. このとき, $b_n = b_m$ が成り立つことを示せ.

解答例

1 (1) $f(x) = -2x^2 + 8tx - 12x + t^3 - 17t^2 + 39t - 18$
 $= -2(x - 2t + 3)^2 + t^3 - 9t^2 + 15t$

よって、最大値は $t^3 - 9t^2 + 15t$

(2) (1)の結果から $g(t) = t^3 - 9t^2 + 15t$

ゆえに $g'(t) = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5)$

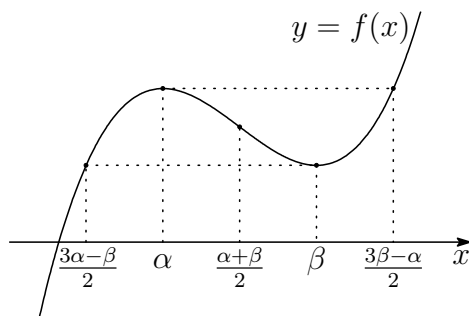
t	...	1	...	5	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	極大 7	↘	極小 -25	↗

$g(-1) = -25$, $-1 < -\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ より, $g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > -25$

よって、求める最小値は $g(5) = -25$

補足 極値をとる2点 $(1, 7)$, $(5, -25)$ の中点 $(3, -18)$ に関して、グラフは対称である。また, $g(-1) = g(5)$, $g(1) = g(7)$.

3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) について, $f'(x) = 0$ が異なる2つの実数解 α , β をもつとき ($\alpha < \beta$), $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



とくに, 数列 $\frac{3\alpha - \beta}{2}, \alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta, \frac{3\beta - \alpha}{2}$ は, 等差数列をなす. ■

- 2** (1) 1 回目の袋 U の中には白球が $a+2$ 個, 赤球が 1 個入っているから

$$p_1 = \frac{1}{(a+2)+1} = \frac{1}{a+3}$$

1 回目に赤球が出ると, 2 回目に球を取り出すとき, 袋 U の中には赤球はない. 1 回目に白球が出て, 2 回目 (袋 U の中に白球 a 個, 赤球が 1 個) に赤球が出る確率であるから

$$p_2 = (1-p_1) \times \frac{1}{a+1} = \left(1 - \frac{1}{a+3}\right) \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

- (2) (i) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で赤球が出たとき (確率 p_n), $n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に赤球は 0 個) で赤球が出る確率は 0
(ii) n 回目 ($n \geq 1$) の試行で白球が出たとき (確率 $1-p_n$), $n+1$ 回目の試行 (袋 U の中に白球 a 個, 赤球 1 個) で赤球が出る確率は

$$(1-p_n) \times \frac{1}{a+1}$$

(i), (ii) より
$$p_{n+1} = 0 + (1-p_n) \times \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$$

したがって
$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

よって, $n \geq 1$ のとき

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2} \right) \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1}$$

■

- 3 (1) $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(q, -\sqrt{3}q)$ とすると $(0 \leq p \leq 2, -3 \leq q \leq 0)$,

$$OP = 2p, \quad OQ = -2q$$

$OP + OQ = 6$ であるから $2p + (-2q) = 6$ ゆえに $q = p - 3$

したがって $0 \leq p \leq 2$, $-3 \leq p - 3 \leq 0$ すなわち $0 \leq p \leq 2$
 2点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を通る直線は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2p-3}{\sqrt{3}}(x-p)$$

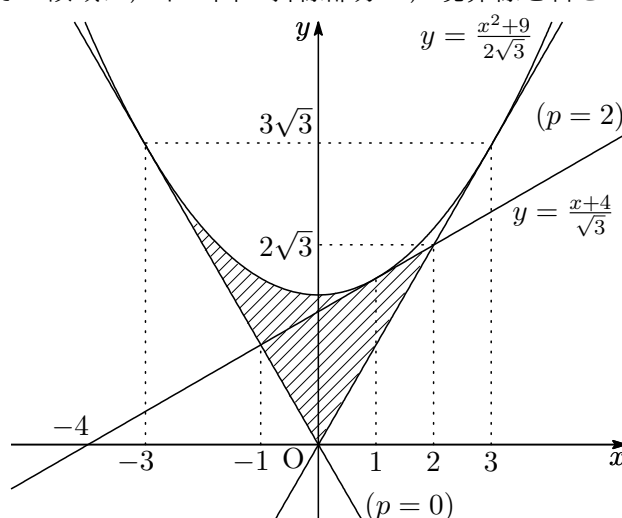
$$\text{すなわち } y = \frac{(2p-3)x - 2p^2 + 6p}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

直線 ① の x を固定し, y が極値をとる点では, $\frac{dy}{dp} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dp} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x - 4p + 6) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2p - 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } p \text{ を消去すると } y = \frac{x^2 + 9}{2\sqrt{3}} \quad \dots (*)$$

D は, $0 \leq p \leq 2$ のとき, 2点 $P(p, \sqrt{3}p)$, $Q(p-3, -\sqrt{3}(p-3))$ を結ぶ線分 PQ (直線 ①) が通過する領域であるから, $(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると, その領域は, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, $0 \leq s \leq 2$ をみたす点 (s, t) が D にあるとき

$$\begin{aligned} -3 \leq s \leq 0 \text{ のとき} & \quad -\sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}} \\ 0 \leq s \leq 1 \text{ のとき} & \quad \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s^2 + 9}{2\sqrt{3}} \\ 1 \leq s \leq 2 \text{ のとき} & \quad \sqrt{3}s \leq t \leq \frac{s+4}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

- (2) 領域 D は (1) で示した領域. ■

4 (1) a_n を素数 p で割った余りが b_n であるから

$$a_{n+2} \equiv b_{n+2}, \quad a_{n+1} \equiv b_{n+1}, \quad a_n \equiv b_n \pmod{p}$$

また, $a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1)$ であるから $b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{p}$

よって, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致する.

(2) $r = 2$ のとき, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ であるから, (1) の結果を用いると

$$b_1 \equiv 2, \quad b_2 \equiv 3, \quad b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1) \pmod{17}$$

したがって, 法 17 について

$$b_3 \equiv b_2(b_1 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_4 \equiv b_3(b_2 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_5 \equiv b_4(b_3 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_6 \equiv b_5(b_4 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_7 \equiv b_6(b_5 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

$$b_8 \equiv b_7(b_6 + 1) \equiv 2(9 + 1) \equiv 20 \equiv 3$$

$$b_9 \equiv b_8(b_7 + 1) \equiv 3(2 + 1) \equiv 9$$

$$b_{10} \equiv b_9(b_8 + 1) \equiv 9(3 + 1) \equiv 36 \equiv 2$$

よって $b_1 = 2, \quad b_2 = 3, \quad b_3 = 9, \quad b_4 = 2, \quad b_5 = 3,$
 $b_6 = 9, \quad b_7 = 2, \quad b_8 = 3, \quad b_9 = 9, \quad b_{10} = 2$

(3) (1) の結果を用いると

$$b_{n+2} \equiv b_{n+1}(b_n + 1), \quad b_{m+2} \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$b_{n+2} = b_{m+2} \text{ より } b_{n+1}(b_n + 1) \equiv b_{m+1}(b_m + 1) \pmod{p}$$

$$q = b_{n+1} = b_{m+1} \text{ とおくと } (q > 0)$$

$$q(b_n + 1) \equiv q(b_m + 1) \quad \text{ゆえに} \quad q(b_n - b_m) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$q \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ であるから } b_n - b_m \equiv 0 \quad \text{すなわち} \quad b_n \equiv b_m \pmod{p}$$

よって, $b_n = b_m$ が成り立つ. ■