

平成 25 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
 文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

- 1 関数 $y = x(x-1)(x-3)$ のグラフを C , 原点 O を通る傾き t の直線を ℓ とし, C と ℓ が O 以外に共有点をもつとする. C と ℓ の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{OQ}|$ の積を $g(t)$ とおく. ただし, それらの共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする. 関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ.

- 2 座標平面上の 3 点

$$P(0, -\sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2}), \quad A(a, \sqrt{a^2+1}) \quad (0 \leq a \leq 1)$$

を考える.

- (1) 2 つの線分の長さの差 $PA - AQ$ は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ.
- (2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y = \frac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする. 点 B から直線 $y = 2$ へ下ろした垂線と直線 $y = 2$ との交点を C とする. このとき, 線分の長さの和

$$PA + AB + BC$$

は a によらない定数であることを示し, その値を求めよ.

- 3 a, b を実数の定数とする. 実数 x, y が

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad 2x + y \leq 5$$

をともに満たすとき, $z = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ の最小値を求めよ.

4 A, B の 2 人がいる. 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり, 最初は A がそのコインを持っている. 次の操作を繰り返す.

- (i) A がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば A に 1 点を与え, コインは A がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, A はコインを B に渡す.
- (ii) B がコインを持っているときは, コインを投げ, 表が出れば B に 1 点を与え, コインは B がそのまま持つ. 裏が出れば, 両者に点を与えず, B はコインを A に渡す.

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で, 2 点を獲得した方の勝利とする. たとえば, コインが表, 裏, 表, 表と出た場合, この時点で A は 1 点, B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる.

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ.

解答例

1 $C: y = x(x-1)(x-3)$ と $\ell: y = tx$ から y を消去すると

$$x(x-1)(x-3) = tx \quad \text{ゆえに} \quad x\{(x-1)(x-3) - t\} = 0$$

C と ℓ の原点以外の交点の x 座標は、方程式

$$x^2 - 4x + 3 - t = 0 \quad \cdots (*)$$

の実数解であるから

$$D/4 = (-2)^2 - (3-t) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad t \geq -1$$

このとき、方程式 $(*)$ の解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha\beta = 3 - t$$

P, Q は ℓ 上の点であるから、 $P(\alpha, t\alpha), Q(\beta, t\beta)$ とすると

$$|\overrightarrow{OP}| = |\alpha|\sqrt{1+t^2}, \quad |\overrightarrow{OQ}| = |\beta|\sqrt{1+t^2}$$

$$\text{ゆえに} \quad g(t) = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}| = |\alpha\beta|(1+t^2) = |3-t|(1+t^2)$$

$$\text{したがって} \quad g(t) = \begin{cases} (3-t)(1+t^2) & (-1 \leq t < 3) \\ (t-3)(1+t^2) & (3 \leq t) \end{cases}$$

$$-1 \leq t < 3 \text{ のとき} \quad g'(t) = -3t^2 + 6t - 1$$

$$\text{このとき、} g'(t) = 0 \text{ の解を } \alpha = \frac{3-\sqrt{6}}{3}, \beta = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \text{ とおくと}$$

$$g(t) = -\frac{1}{3}g'(t)(-t+1) + \frac{4}{3}t + \frac{8}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad g(\alpha) = \frac{4}{3}\alpha + \frac{8}{3} = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}, \quad g(\beta) = \frac{4}{3}\beta + \frac{8}{3} = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$3 \leq t \text{ のとき} \quad g'(t) = 3t^2 - 6t + 1 = 3t(t-2) + 1 > 0$$

t	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		-	0	+	0	-		+
$g(t)$	8	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\text{よって} \quad \text{極小値} g\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right) = 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}, \quad \text{極小値} g(3) = 0,$$

$$\text{極大値} g\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right) = 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}$$



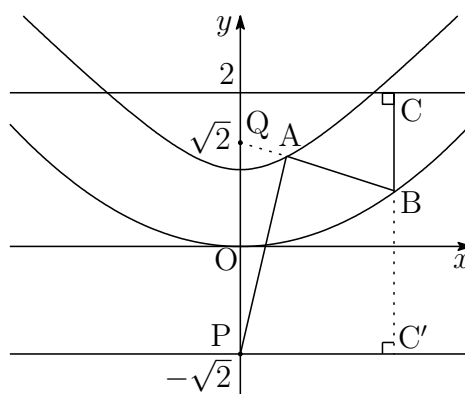
- 2 (1) $P(0, -\sqrt{2})$, $Q(0, \sqrt{2})$, $A(a, \sqrt{a^2+1})$ より

$$\begin{aligned} PA^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1} + \sqrt{2})^2 = 2a^2 + 3 + 2\sqrt{2(a^2+1)} \\ &= (2a^2 + 2) + 1 + 2\sqrt{(2a^2+2) \cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2} + 1)^2, \\ AQ^2 &= a^2 + (\sqrt{a^2+1} - \sqrt{2})^2 = 2a^2 + 3 - 2\sqrt{2(a^2+1)} \\ &= (2a^2 + 2) + 1 - 2\sqrt{(2a^2+2) \cdot 1} = (\sqrt{2a^2+2} - 1)^2 \end{aligned}$$

したがって $PA = \sqrt{2a^2+2} + 1$, $AQ = \sqrt{2a^2+2} - 1$

$$PA - AQ = (\sqrt{2a^2+2} + 1) - (\sqrt{2a^2+2} - 1) = 2$$

- (2) $B\left(t, \frac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とする ($0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$).



B から直線 $y = -\sqrt{2}$ へ直線 BC' を下ろすと

$$QB^2 = t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{32}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2}\right)^2$$

ゆえに $QB = \frac{\sqrt{2}}{8}t^2 + \sqrt{2} = BC'$

(1) の結果および上式により

$$\begin{aligned} PA + AB + BC &= (PA - AQ) + (QA + AB) + BC \\ &= 2 + QB + BC \\ &= 2 + (QB - BC') + (BC' + BC) \\ &= 2 + 0 + CC' = 2 + (2 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

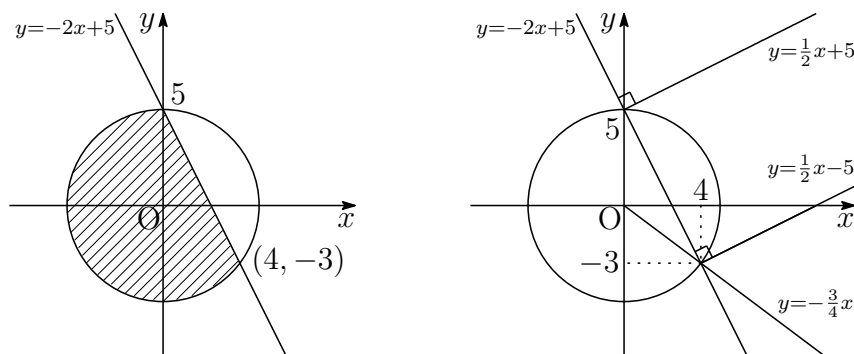
補足 A は双曲線 $x^2 - y^2 = -1$ 上にあり, P, Q はその焦点であるから, $|PA - AQ|$ は双曲線の 2 頂点 $(0, 1)$, $(0, -1)$ 間の距離に等しい.

また, Q は放物線 $x^2 = 4\sqrt{2}y$ の焦点で, 直線 $x = -\sqrt{2}$ はその準線であるから, $QB = BC'$ が成り立つ¹. ■

¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_jou_2010.pdf [3] を参照.

3 連立不等式
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$$

の表す領域は下の図の斜線部分で境界線を含む.



座標平面上に 2 点 $P(x, y)$, $A(a, b)$ をとると

$$\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 - 2ax - 2by \\ &= (x - a)^2 + (y - b)^2 - (a^2 + b^2) = AP^2 - OA^2 \end{aligned}$$

(i) $a^2 + b^2 \leq 25$, $2a + b \leq 5$ のとき, $P = A$ より **最小値 $-a^2 - b^2$**

(ii) $a^2 + b^2 \geq 25$ かつ $\left(a \leq 0 \text{ または } b \leq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき, $AP = OA - 5$ より

$$(OA - 5)^2 - OA^2 = 25 - 10OA \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } 25 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

(iii) $a \geq 0$, $b \geq \frac{1}{2}a + 5$ のとき, $P(0, 5)$ より

$$AP^2 - OA^2 = a^2 + (b - 5)^2 - (a^2 + b^2) \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } 25 - 10b$$

(iv) $b \geq -\frac{3}{4}a$, $b \leq \frac{1}{2}a - 5$ のとき, $P(4, -3)$ より

$$AP^2 - OA^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2 - (a^2 + b^2)$$

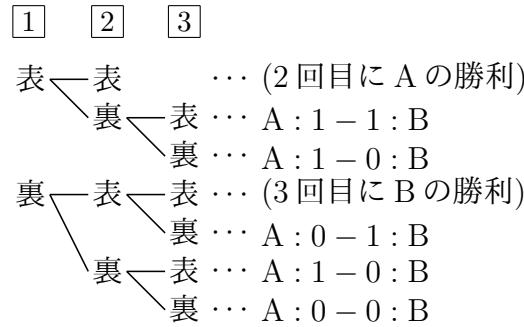
ゆえに **最小値 $25 - 8a + 6b$**

(v) $b \geq -2a + 5$, $\frac{1}{2}a - 5 \leq b \leq \frac{1}{2}a + 5$ のとき, $AP = \frac{|2a + b - 5|}{\sqrt{5}}$ より

$$AP^2 - OA^2 = \frac{(2a + b - 5)^2}{5} - (a^2 + b^2)$$

ゆえに **最小値 $\frac{1}{5}(25 + 4ab - 20a - 10b - a^2 - 4b^2)$** ■

4 3回コインを投げ終えたとき、AとBの勝敗は次のようになる。



したがって $p(1) = 0$, $p(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $p(3) = 0$ … (*)

コインをちょうど n 回投げ終え ($n \geq 4$), Aが勝利するとき、AとBの得点の推移は、次の (i)~(iii) である。

(i) n 回目よりも前に A だけが得点するのは奇数回目で、 n は偶数。

A B … A B A A B … A B A
裏裏 … 裏裏 表 裏裏 … 裏裏 表

偶数個 偶数個

1 から $n - 1$ の整数の中に奇数は $\frac{n}{2}$ 個で、この確率は $\frac{n}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n}{2^{n+1}}$

(ii) n 回目よりも前に A, B の順に得点するのは奇数回目で、 n は奇数。

A B … A B A A B … A B B A … B A
裏裏 … 裏裏 表 裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏 表

偶数個 奇数個 奇数個

1 から $n - 1$ の整数の中に奇数は $\frac{n-1}{2}$ 個で、この確率は

$$\frac{n-1}{2} C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

(iii) n 回目よりも前に B, A の順に得点するのは偶数回目で、 n は奇数。

A B … A B B A … B A A B … A B A
裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏 表 裏裏 … 裏裏 表

奇数個 奇数個 偶数個

1 から $n - 1$ の整数の中に偶数は $\frac{n-1}{2}$ 個で、この確率は

$$\frac{n-1}{2} C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}$$

n が偶数のとき, (i) より $p(n) = \frac{n}{2^{n+1}} \quad (n \geq 4)$

n が奇数のとき, (ii), (iii) より

$$p(n) = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} + \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}} = \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} \quad (n \geq 5)$$

(*) に注意すると, 上の 2 式は $n = 1, 2, 3$ のときも成立するから

$$p(n) = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{n}{2^{n+1}} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

