

平成 24 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

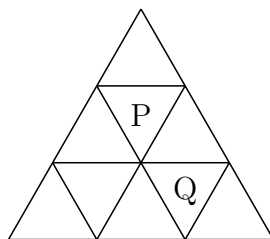
- 1 座標平面上の点 (x, y) が次の方程式を満たす.

$$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ.

- 2 実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし, 座標平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える. また線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める. t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ.

- 3 図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P , Q を定める. 1 つの球が部屋 P を出発し, 1 秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する. 球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ.



- 4 座標平面上の放物線 C を $y = x^2 + 1$ で定める. s, t は実数とし $t < 0$ を満たすとする. 点 (s, t) から放物線 C へ引いた接線を l_1, l_2 とする.

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ.

(2) a を正の実数とする. 放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a となる (s, t) を全て求めよ.

解答例

- 1 与えられた方程式を y について整理すると

$$3y^2 + (4x + 5)y + (2x^2 + 4x - 4) = 0$$

y は実数解をもつから、係数について

$$(4x + 5)^2 - 4 \cdot 3(2x^2 + 4x - 4) \geq 0$$

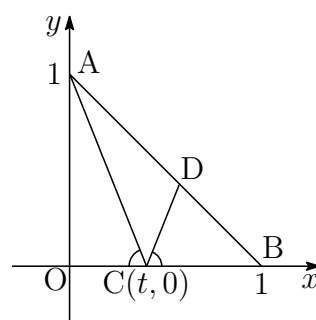
$$\text{ゆえに } 8x^2 + 8x - 73 \leq 0 \quad \text{これを解いて } \frac{-2 - 5\sqrt{6}}{4} \leq x \leq \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{よって、求める } x \text{ の最大値は } \frac{-2 + 5\sqrt{6}}{4}$$

- 2 2点 $A(0, 1)$, $C(t, 0)$ を通る直線の傾きは $-\frac{1}{t}$
直線 CD は、傾き $\frac{1}{t}$ で点 $C(t, 0)$ を通るから

$$y = \frac{1}{t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{t}x - 1$$

D はこれと直線 $AB: y = -x + 1$ の交点であるから



$$D\left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (t, 0) - (0, 1) = (t, -1),$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t}\right) - (0, 1) = \frac{2t}{1+t}(1, -1)$$

三角形 ACD の面積を S とすると、 $0 < t < 1$ に注意して

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t}(1-t) = 2 - t - \frac{2}{1+t} = 3 - \left(1+t + \frac{2}{1+t}\right)$$

$1+t > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1+t + \frac{2}{1+t} \geq 2\sqrt{(1+t) \cdot \frac{2}{1+t}} = 2\sqrt{2}$$

上式で等号が成立するのは

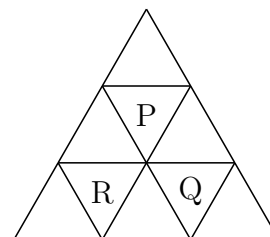
$$1+t = \frac{2}{1+t} \quad \text{ゆえに} \quad t = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{したがって} \quad S \leq 3 - 2\sqrt{2}$$

よって、 $\triangle ACD$ の面積は $t = \sqrt{2} - 1$ のとき、最大値 $3 - 2\sqrt{2}$ をとる。

- 3 右の図のように部屋 R をとると、 n 秒後の球は、 n が偶数のとき、部屋 P, Q, R にあり、 n が奇数のとき、P, Q, R 以外の部屋にある。
したがって、 n が奇数のとき、部屋 Q にある確率は

$$0$$



n が偶数のとき、 $n = 2k$ 秒後に、P, Q, R にある確率を p_k , q_k , r_k とすると

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ q_{k+1} &= q_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + r_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ r_{k+1} &= r_k \times \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + p_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + q_k \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって、 k を 0 以上の整数とすると、次の確率漸化式が成立する。

$$p_0 = 1, \quad q_0 = r_0 = 0$$

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$q_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{2}{3}q_k + \frac{1}{6}r_k \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{k+1} = \frac{1}{6}p_k + \frac{1}{6}q_k + \frac{2}{3}r_k \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③ の辺々を加えると

$$p_{k+1} + q_{k+1} + r_{k+1} = p_k + q_k + r_k \quad \text{ゆえに} \quad p_k + q_k + r_k = 1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } p_{k+1} - q_{k+1} = \frac{1}{2}(p_k - q_k) \quad \text{ゆえに} \quad p_k - q_k = \frac{1}{2^k} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より } q_{k+1} - r_{k+1} = \frac{1}{2}(q_k - r_k) \quad \text{ゆえに} \quad q_k - r_k = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ より } q_k = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

よって、求める確率は n が奇数のとき 0 ,

$$n \text{ が偶数のとき } \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \right)$$

■

4 (1) $y = x^2 + 1$ を微分すると $y' = 2x$

C 上の点 $(\alpha, \alpha^2 + 1)$ における接線を l_1 とすると

$$y - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(x - \alpha)$$

すなわち $l_1 : y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1$

C 上の点 $(\beta, \beta^2 + 1)$ における接線を l_2 とすると

$$l_2 : y = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

l_1 と l_2 の交点が (s, t) であるから

$$s = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad t = \alpha\beta + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = 2s, \quad \alpha\beta = t - 1$$

α, β を解とする 2 次方程式は $\lambda^2 - 2s\lambda + t - 1 = 0 \quad \cdots (*)$

これを解いて $\lambda = s \pm \sqrt{s^2 - t + 1}$

$\alpha < \beta$ とすると $\alpha = s - \sqrt{s^2 - t + 1}, \quad \beta = s + \sqrt{s^2 - t + 1}$

l_1 は、点 (s, t) を通り、傾き 2α の直線であるから

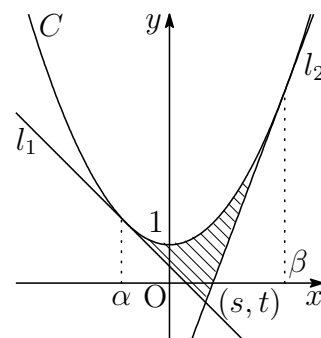
$$y = 2(s - \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t$$

l_2 は、点 (s, t) を通り、傾き 2β の直線であるから

$$y = 2(s + \sqrt{s^2 - t + 1})(x - s) + t$$

(2) C と l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a であるから

$$\begin{aligned} a &= \int_{\alpha}^s \{(x^2 + 1) - (2\alpha x - \alpha^2 + 1)\} dx \\ &\quad + \int_s^{\beta} \{(x^2 + 1) - (2\beta x - \beta^2 + 1)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^s (x - \alpha)^2 dx + \int_s^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^s + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_s^{\beta} = \frac{1}{3}(s - \alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta - s)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right)^3 + \frac{1}{3} \left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{s^2 - t + 1})^3 = \frac{2}{3}(s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots (**)$$



$t < 0$ であるから, (**) より $a > \frac{2}{3}$ このとき $(s^2 - t + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{3a}{2}$

したがって $t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ このとき $s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < 0$

これを解いて $-\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$

よって, $a > \frac{2}{3}$ のとき, (s, t) は

$$t = s^2 + 1 - \left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad -\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1} < s < \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$$

$0 < a \leq \frac{2}{3}$ のとき, (s, t) は存在しない.

補足 $s = \frac{\alpha + \beta}{2}$, C と l_1, l_2 との接点をそれぞれ P, Q とすると, C と直線 PQ で囲まれた部分の面積は $2a$ となる¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun_2009.pdf 4 を参照.