

平成22年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 Oを原点とする座標平面上に点A(-3, 0)をとり, $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲にある θ に対して, 次の条件(i), (ii)をみたす2点B, Cを考える.

(i) Bは $y > 0$ の部分にあり, $OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180^\circ - \theta$ である.

(ii) Cは $y < 0$ の部分にあり, $OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120^\circ$ である.

ただし $\triangle ABC$ はOを含むものとする.

以下の問(1), (2)に答えよ.

(1) $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき, θ の値を求めよ.

(2) θ を $0^\circ < \theta < 120^\circ$ の範囲で動かすとき, $\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と, そのときの $\sin \theta$ の値を求めよ.

2 2次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ に対して

$$f(x+1) = c \int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t) dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a, b, c の組をすべて求めよ.

3 2つの箱LとR, ボール30個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する. x を0以上30以下の整数とする. Lに x 個, Rに $30 - x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す.

(#) 箱Lに入っているボールの個数を z とする. コインを投げ, 表が出れば箱Rから箱Lに, 裏が出れば箱Lから箱Rに, $K(z)$ 個のボールを移す. ただし, $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ とする.

m 回の操作の後, 箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする. たとえば $P_1(15) = P_2(15) = \frac{1}{2}$ となる. 以下の問(1), (2)に答えよ.

(1) $m \geq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ.

(2) n を自然数とするととき, $P_{2n}(10)$ を求めよ.

- 4 C を半径1の円周とし、 A を C 上の1点とする. 3点 P , Q , R が A を時刻 $t = 0$ に出発し、 C 上を各々一定の速さで、 P , Q は反時計回りに、 R は時計回りに、時刻 $t = 2\pi$ まで動く. P , Q , R の速さは、それぞれ m , 1 , 2 であるとする. (したがって、 Q は C をちょうど一周する.) ただし、 m は $1 \leq m \leq 10$ をみたす整数である. $\triangle PQR$ が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $\angle AOB = 180^\circ - \theta$ より, OB の x 軸の正の向きとなす角は θ である. $\angle BOC = 120^\circ$ であるから ($0^\circ < \theta < 180^\circ$), OC の x 軸の正の向きとなす角は $120^\circ - \theta$ である.

$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき, B, C から x 軸におろした垂線の長さが等しいから

$$2 \sin \theta = \sin(120^\circ - \theta) \quad \dots \textcircled{1}$$

右辺を変形すると

$$\begin{aligned} \sin(120^\circ - \theta) &= \sin 120^\circ \cos \theta - \cos 120^\circ \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

② を ① に代入して整理すると

$$\frac{3}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 0$$

したがって $2 \sin(\theta - 30^\circ) = 0$ ($0 < \theta < 120^\circ$) よって $\theta = 30^\circ$

- (2) B, C から x 軸に下ろした垂線の長さの和が最大となる θ を求めればよいから, ② を利用して

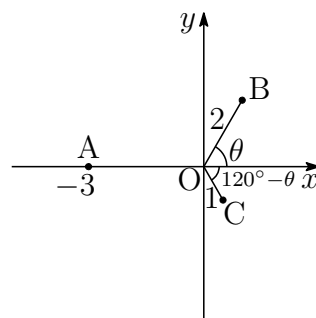
$$\begin{aligned} 2 \sin \theta + \sin(120^\circ - \theta) &= 2 \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{5}{2} \sin \theta \\ &= \sqrt{7} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cos \theta + \frac{5}{2\sqrt{7}} \sin \theta \right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

ここで, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \sin \alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$ とおくと ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$$\begin{aligned} (*) &= \sqrt{7} \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \\ &= \sqrt{7} \cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

(*) が最大となるとき $\theta - \alpha = 0$ すなわち $\sin \theta = \sin \alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

このとき, 求める面積の和の最大値は $\frac{1}{2} OA \cdot (*) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ ■



2 $f(x) = x^2 + ax + b$ より, $f(1) - f(0) = a + 1$ であるから

$$\int_0^1 f'(t) dt = \left[f(t) \right]_0^1 = f(1) - f(0) = a + 1$$

また, $f'(x) = 2x + a$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^1 t f'(t) dt &= \int_0^1 t(2t + a) dt = \int_0^1 (2t^2 + at) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{a}{2} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \int_0^1 (3x^2 + 4xt) f'(t) dt &= 3x^2 \int_0^1 f'(t) dt + 4x \int_0^1 t f'(t) dt \\ &= 3x^2(a + 1) + 4x \left(\frac{a}{2} + \frac{2}{3} \right) \\ &= (3a + 3)x^2 + \left(2a + \frac{8}{3} \right) x, \\ f(x + 1) &= (x + 1)^2 + a(x + 1) + b \\ &= x^2 + (a + 2)x + a + b + 1 \end{aligned}$$

これらを条件式に代入すると

$$x^2 + (a + 2)x + a + b + 1 = c \left\{ (3a + 3)x^2 + \left(2a + \frac{8}{3} \right) x \right\}$$

x について同じ次数の項の係数を比較すると

$$1 = c(3a + 3), \quad a + 2 = c \left(2a + \frac{8}{3} \right), \quad a + b + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

(*) の第 1 式と第 2 式から c を消去すると

$$(a + 2)(3a + 3) = 2a + \frac{8}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (3a + 2)(3a + 5) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a = -\frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{3}$$

$$(*) \text{ の第 1 式と第 3 式から} \quad c = \frac{1}{3a + 3}, \quad b = -a - 1$$

$$\text{よって} \quad (a, b, c) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right), \quad \left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \right)$$

■

- 3** (1) $0 \leq z \leq 15$ のとき $K(z) = z$, $16 \leq z \leq 30$ のとき $K(z) = 30 - z$ より

$$K(z) = \min(z, 30 - z)$$

(#) により, 次の確率漸化式が成立する.

$$P_m(x) = \frac{1}{2}P_{m-1}(x + K(x)) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - K(x)),$$

$$P_m(0) = 0, \quad P_m(30) = 1$$

- (i) $0 \leq x \leq 15$ のとき, $K(x) = x$ であるから

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(x + x) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - x) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) + \frac{1}{2}P_{m-1}(0) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) \end{aligned}$$

- (ii) $16 \leq x \leq 30$ のとき, $K(x) = 30 - x$ であるから

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \frac{1}{2}P_{m-1}(x + (30 - x)) + \frac{1}{2}P_{m-1}(x - (30 - x)) \\ &= \frac{1}{2}P_{m-1}(30) + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{ より } P_m(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0 \leq x \leq 15) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_{m-1}(2x - 30) & (16 \leq x \leq 30) \end{cases}$$

- (2) (1) で示した確率漸化式により

$$\begin{aligned} P_{2n}(10) &= \frac{1}{2}P_{2n-1}(20) + \frac{1}{2}P_{2n-1}(0) = \frac{1}{2}P_{2n-1}(20) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}P_{2n-2}(30) + \frac{1}{2}P_{2n-2}(10) \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}P_{2n-2}(10) \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } a_n = P_{2n}(10) \text{ とおくと } a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}a_{n-1}, \quad a_0 = 0$$

$$\text{上式より } a_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{1}{3} \right) \quad \text{ゆえに} \quad a_n - \frac{1}{3} = \left(a_0 - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \quad \text{よって} \quad P_{2n}(10) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) \quad \blacksquare$$

- 4 R に対する P, Q の相対速度は, それぞれ $m+2, 3$ である. PR は円 C の直径であるから

$$(m+2)t = (2l-1)\pi \quad (l \text{ は整数})$$

C の中心を O とすると, $\angle ROQ = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$3t = \frac{2n-1}{2}\pi \quad (n \text{ は整数})$$

上の 2 式から $t = \frac{2l-1}{m+2}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \dots (*)$

このとき, $0 < t < 2\pi$ であるから

$$0 < \frac{2n-1}{6}\pi < 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq n \leq 6$$

(*) より $(m+2)(2n-1) = 6(2l-1)$

$2n-1, 2l-1$ は奇数であるから, $m+2$ は 4 で割り切れない偶数である.

(i) $m+2=6$, すなわち, $m=4$ のとき, (*) より

$$t = \frac{2l-1}{6}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \text{すなわち} \quad l=n \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

(ii) $m+2=10$, すなわち, $m=8$ のとき, (*) より

$$t = \frac{2l-1}{10}\pi = \frac{2n-1}{6}\pi \quad \text{ゆえに} \quad 3(2l-1) = 5(2n-1)$$

すなわち $(l, n) = (3, 2), (8, 5)$

よって $m=4$ のとき $t = \frac{2n-1}{6}\pi \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$m=8$ のとき $t = \frac{2n-1}{6}\pi \quad (n=2, 5)$

