

平成 20 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分

文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

- 1 $0 \leq \alpha \leq \beta$ をみたす実数 α, β と, 2 次式 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ について,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1$$

が成立しているとする. このとき定積分

$$S = \int_0^\alpha f(x) dx$$

を α の式で表し, S がとりうる値の最大値を求めよ.

- 2 白黒 2 種類のカードがたくさんある. そのうち 4 枚を手もとにもっているとき, 次の操作 (A) を考える.

(A) 手持ちの 4 枚の中から 1 枚を, 等確率 $\frac{1}{4}$ で選び出し, それを違う色のカードにとりかえる.

最初にもっている 4 枚のカードは, 白黒それぞれ 2 枚であったとする. 以下の (1), (2) に答えよ.

- (1) 操作 (A) を 4 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.
- (2) 操作 (A) を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ.

- 3 座標平面上の 3 点 A(1, 0), B(-1, 0), C(0, -1) に対し,

$$\angle APC = \angle BPC$$

をみたす点 P の軌跡を求めよ. ただし $P \neq A, B, C$ とする.

- 4 p を自然数とする. 次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える.

$$\begin{cases} a_1 = p, b_1 = p + 1 \\ a_{n+1} = a_n + pb_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = pa_n + (p + 1)b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, 次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ.

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np, \quad b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

- (2) p を 3 以上の奇数とする. このとき, a_p は p^2 で割り切れるが, p^3 では割り切れないことを示せ.

解答例

1 $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ より

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\alpha + \beta}{2}x^2 + \alpha\beta x \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 2\alpha\beta\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \text{ であるから } \quad \frac{2}{3} + 2\alpha\beta = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{1}{6\alpha}$$

$$0 \leq \alpha \leq \beta \text{ であるから } \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{6\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned}S &= \int_0^\alpha \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx \\ &= \int_0^\alpha \left\{ x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{6\alpha} \right) x + \frac{1}{6} \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{6\alpha} \right) x^2 + \frac{x}{6} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{\alpha^3}{3} - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{6\alpha} \right) \alpha^2 + \frac{\alpha}{6} = -\frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha}{12}, \\ \frac{dS}{d\alpha} &= -\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{6} \right)\end{aligned}$$

したがって、 α の関数 S の増減表は

α	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		+	
S	(0)	$\nearrow$	$\frac{1}{18\sqrt{6}}$

よって $\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき、 S の最大値は $\frac{1}{18\sqrt{6}}$



- 2** (1) 2回目に白と黒のカードが2枚ずつである確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4}$$

白と黒のカードが2枚ずつの状態から、2回の操作の後に4枚とも同じ色になる確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{4}$$

よって、求める確率は $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$

- (2) 操作(A)を n 回繰り返す中で4枚とも同じ色になることなしに、白と黒のカードが2枚ずつである確率を p_n とする.

- (i) n が奇数のとき

奇数回目に4枚とも同じ色になることはないので、求める確率は 0

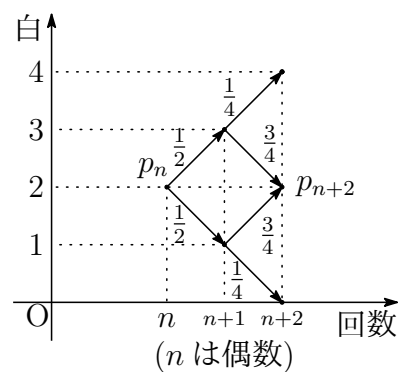
- (ii) n が偶数のとき $p_0 = 1$

$$p_{n+2} = p_n \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{4} p_n$$

ゆえに $p_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

求める確率は

$$p_{n-2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$



3 $\angle APC = \angle BPC$ より, $\cos \angle APC = \cos \angle BPC$ であるから

$$\frac{AP^2 + CP^2 - AC^2}{2AP \cdot CP} = \frac{BP^2 + CP^2 - BC^2}{2BP \cdot CP}$$

ゆえに
$$\frac{AP^2 + CP^2 - AC^2}{AP} = \frac{BP^2 + CP^2 - BC^2}{BP} \quad \dots \textcircled{1}$$

$P(x, y)$ とおくと, $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, -1)$ より

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x-1)^2 + y^2, & BP^2 &= (x+1)^2 + y^2 \\ CP^2 &= x^2 + (y+1)^2, & AC^2 &= BC^2 = 2 \end{aligned}$$

これらを $\textcircled{1}$ に代入して整理すると

$$\frac{x^2 + y^2 - x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \frac{x^2 + y^2 + x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1}} \quad \dots (*)$$

ここで $A = x^2 + y^2 + y$, $B = x^2 + y^2 + 1$ とおくと

$$\frac{A-x}{\sqrt{B-2x}} = \frac{A+x}{\sqrt{B+2x}}$$

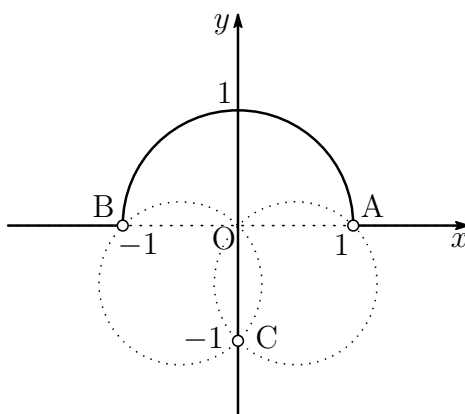
ゆえに $(A-x)^2(B+2x) = (A+x)^2(B-2x)$

整理すると $x\{A(A-B) + x^2\} = 0$

$$x\{(x^2 + y^2 + y)(y-1) + x^2\} = 0$$

したがって $xy(x^2 + y^2 - 1) = 0 \quad \dots (**)$

(*) より, 2 円 $x^2 + y^2 - x + y = 0$, $x^2 + y^2 + x + y = 0$ のともに内部・外部・円周上にあり, (**) を満たす点で下の図の実線部分である.



$$\begin{aligned}
 \boxed{4} \quad (1) \quad (*) \quad & \begin{cases} c_n = a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np \\ d_n = b_n - n(n-1)p^2 - np - 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ とおくと} \\
 & a_n = c_n + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + np, \quad b_n = d_n + n(n-1)p^2 + np + 1
 \end{aligned}$$

これらを与えられた漸化式に代入すると

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} + \frac{n(n+1)}{2}p^2 + (n+1)p &= c_n + p \{d_n + n(n-1)p^2 + np + 1\}, \\
 d_{n+1} + n(n+1)p^2 + (n+1)p + 1 \\
 &= p \left\{ c_n + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + np \right\} + (p+1) \{d_n + n(n-1)p^2 + np + 1\}
 \end{aligned}$$

上の2式をそれぞれ整理すると

$$(**) \quad \begin{cases} c_{n+1} = c_n + pd_n + n(n-1)p^3 \\ d_{n+1} = pc_n + (p+1)d_n + \frac{3}{2}n(n-1)p^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (*) \text{ より } \quad c_1 &= a_1 - p = p - p = 0 \\
 d_1 &= b_1 - p - 1 = (p+1) - p - 1 = 0
 \end{aligned}$$

c_1, d_1 は p^3 で割り切れることと, $\frac{3}{2}n(n-1)$ は整数であるから, 漸化式 $(**)$ により, c_n, d_n は p^3 で割り切れる.

$$(2) \quad (*) \text{ により } \quad c_p = a_p - \frac{p(p-1)}{2}p^2 - p^2$$

$$\text{ゆえに} \quad a_p = c_p + \frac{p-1}{2}p^3 + p^2$$

p は3以上の奇数であるから, $\frac{p-1}{2}$ は整数で

$$c_p + \frac{p-1}{2}p^3$$

は p^3 で割り切れる.

よって, a_p は p^2 で割り切れるが, p^3 では割り切れない. ■