

平成19年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
 文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 連立不等式

$$y(y - |x^2 - 5| + 4) \leq 0, \quad y + x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

の表す領域を D とする.

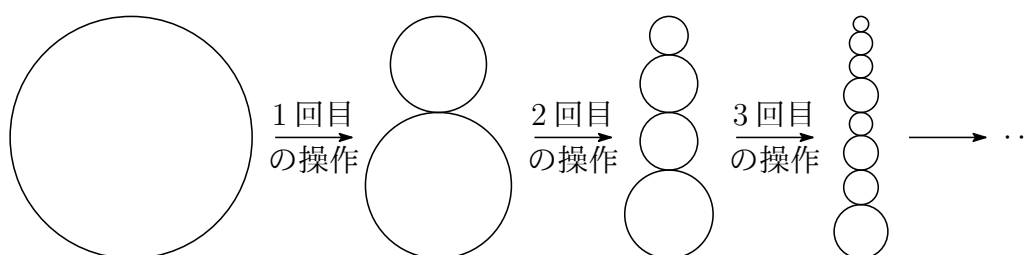
- (1) D を図示せよ.
- (2) D の面積を求めよ.

2 r は $0 < r < 1$ をみたす実数, n は2以上の整数とする. 平面上に与えられた1つの円を, 次の条件①, ②をみたす2つの円で置き換える操作(P)を考える.

- ① 新しい2つの円の半径は $r : 1 - r$ で, 半径の和はもとの円の半径に等しい.
- ② 新しい2つの円は互いに外接し, もとの円に接する.

以下のようにして, 平面上に 2^n 個の円を作る.

- 最初に, 平面上に半径1の円を描く.
- 次に, この円に対して操作(P)を行い, 2つの円を得る(これを1回目の操作という).
- k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて, 操作(P)を行い, 2^{k+1} 個の円を得る ($1 \leq k \leq n - 1$).



- (1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ.
- (2) 2回目の操作で得られる4つの円の面積の和を求めよ.
- (3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ.

3 正の整数の下2桁^{けた}とは、100の位以上を無視した数をいう．たとえば2000, 12345の下2桁はそれぞれ0, 45である． m が正の整数全体を動くとき、 $5m^4$ の下2桁として現れる数をすべて求めよ．

4 表が出る確率が p 、裏が出る確率が $1 - p$ であるような硬貨がある．ただし、 $0 < p < 1$ とする．この硬貨を投げて、次のルール (R) の下で、ブロック積ゲームを行う．

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} \text{① ブロックの高さは、最初は0とする.} \\ \text{② 硬貨を投げて表が出れば高さ1のブロックを1つ積み上げ,} \\ \text{裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ0に戻す.} \end{array} \right.$$

n を正の整数、 m を $0 \leq m \leq n$ をみたす整数とする．

- (1) n 回硬貨を投げたとき、最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ．
- (2) (1)で、最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ．
- (3) ルール (R) の下で、 n 回の硬貨投げを独立に2度行い、それぞれ最後のおブロックの高さを考える．2度のうち、高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ、ただし、最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする．

解答例

1 (1) $y(y - |x^2 - 5| + 4) \leq 0$ の表す領域は

(A) $|x| \leq \sqrt{5}$ のとき, $y(y + x^2 - 1) \leq 0$ より

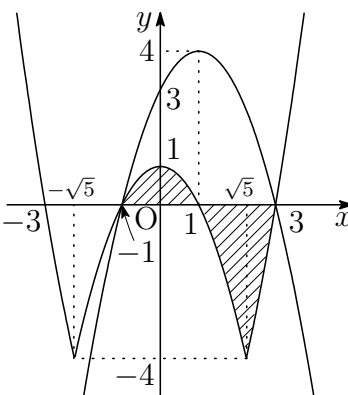
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq -x^2 + 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq -x^2 + 1 \end{cases}$$

(B) $|x| \geq \sqrt{5}$ のとき, $y(y - x^2 + 9) \leq 0$ より

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq x^2 - 9 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq x^2 - 9 \end{cases}$$

(C) $y + x^2 - 2x - 3 \leq 0$ より $y \leq -(x+1)(x-3)$

領域 D は (A) かつ (C) および (B) かつ (C) を満たす領域で右の図の斜線部分で, 境界線を含む.



(2) (1) の結果から, D の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^{\sqrt{5}} (x^2 - 1) dx + \int_{\sqrt{5}}^3 (-x^2 + 9) dx \\ &= \frac{2^3}{6} + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^{\sqrt{5}} + \left[-\frac{x^3}{3} + 9x \right]_{\sqrt{5}}^3 \\ &= 20 - \frac{20}{3}\sqrt{5} \end{aligned}$$

■

- 2** (1) 操作 (P) によって、半径 a の円は、半径 ra と $(1-r)a$ の2つの円に置き換わる．元の円の円周は $2\pi a$ ，置き換わった2つの円の円周の和は

$$2\pi ra + 2\pi(1-r)a = 2\pi a$$

したがって、操作 (P) による円周の長さの和は不変である．求める円の周の長さは最初の半径1の円周の長さに等しいから

$$2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

- (2) 操作 (P) によって、半径 a の円は、半径 ra と $(1-r)a$ の2つの円に置き換わる．元の円の面積は πa^2 ，置き換わった2つの円の面積の和は

$$\pi(ra)^2 + \pi(1-r)a^2 = 2\pi a^2\{r^2 + (1-r)^2\}$$

したがって、操作 (P) による円の面積の和は、元の面積の $r^2 + (1-r)^2$ 倍である．よって、求める面積の面積の和は

$$\pi \cdot 1^2 \times \{r^2 + (1-r)^2\}^2 = \pi \{r^2 + (1-r)^2\}^2$$

- (3) 求める面積の和は、(2) と同様にして $\pi \{r^2 + (1-r)^2\}^n$ ■

- 3** $m = 10n + q$ とおくと ($q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5$)

$$\begin{aligned} 5m^4 &= 5(10n + q)^4 \\ &= 5(10000n^4 + 4000n^3q + 600n^2q^2 + 40nq^3 + q^4) \\ &= 100(500n^4 + 200n^3q + 30n^2q^2 + 2nq^3) + 5q^4 \\ &\equiv 5q^4 \pmod{100} \end{aligned}$$

したがって、法100について

$$\begin{aligned} 5 \cdot 0^4 &\equiv 0, & 5 \cdot (\pm 1)^4 &\equiv 5, & 5 \cdot (\pm 2)^4 &\equiv 80, \\ 5 \cdot (\pm 3)^4 &\equiv 5, & 5 \cdot (\pm 4)^4 &\equiv 80, & 5 \cdot 5^4 &\equiv 25 \end{aligned}$$

よって、求める数は **0, 5, 25, 80** ■

- 4 (1) $m = n$ のとき, n 回とも表であるから $p_n = p^n$
 $0 \leq m \leq n - 1$ のとき, $n - m$ 回目に裏が出て, $n - m + 1$ 回目から n 回目まで連続して m 回表が出るから

$$p_m = (1 - p)p^m$$

- (2) $m = n$ のとき, 高さは n 以下であるから $q_n = 1$
 $0 \leq m \leq n - 1$ のとき, (1) の結果を利用して

$$q_m = \sum_{k=0}^m p_k = \sum_{k=0}^m (1 - p)p^k = (1 - p) \cdot \frac{1 - p^{m+1}}{1 - p} = 1 - p^{m+1}$$

別解 高さが m より大きくなる (最後の $m + 1$ 回が表) 確率は p^{m+1}
 求める確率はこの余事象の確率であるから, $0 \leq m \leq n - 1$ のとき

$$q_m = 1 - p^{m+1}$$

- (3) 1 度目が m , 2 度目が m 以下となる事象を A
 1 度目が m 以下, 2 度目が m となる事象を B
 とすると, $A \cap B$ は 1 度目も 2 度目も m である事象で, これらの確率は

$$P(A) = p_m q_m, \quad P(B) = q_m p_m, \quad P(A \cap B) = p_m^2$$

求める確率は

$$\begin{aligned} r_m &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 2p_m q_m - p_m^2 = p_m(2q_m - p_m) \end{aligned}$$

- (i) $m = n$ のとき

$$r_n = p_n(2q_n - p_n) = p^n(2 - p^n)$$

- (ii) $0 \leq m \leq n - 1$ のとき

$$\begin{aligned} r_m &= p_m(2q_m - p_m) \\ &= (1 - p)p^m \{2(1 - p^{m+1}) - (1 - p)p^m\} \\ &= (1 - p)p^m(2 - p^m - p^{m+1}) \end{aligned}$$

