

平成 15 年度 東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文科 (一類, 二類, 三類) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする.

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件 (A), (B) を満たすとする.

$$(A) \quad f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(1) \leq 6$$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し,

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ.

2 a, b を実数とする. 次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする.

$$x + 3y \geq a$$

$$3x + y \geq b$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

領域 D における $x + y$ の最小値を求めよ.

3 2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α , 小さいものを β とする.

$n = 1, 2, 3, \dots$ に対し,

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく.

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ. また, $n \geq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ.

(2) s_n は正の整数であることを示し, s_{2003} の 1 の位の数をも求めよ.

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数をも求めよ.

- 4 さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする．ただし，1 で割った余りは 0 である．

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする．以下同様にして， X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする．

このようにして， X_n , $n = 1, 2, \dots$ を定める．

- (1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．
- (2) 各 n に対し， $X_n = 5$ となる確率を求めよ．
- (3) 各 n に対し， $X_n = 1$ となる確率を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

解答例

1 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ を満たすから

$$a - b + c = -1, \quad a + b + c = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = 1, \quad c = -a$$

$$f(x) = ax^2 + x - a \quad \text{から} \quad f'(x) = 2ax + 1$$

$$f'(1) \leq 6 \quad \text{より} \quad 2a + 1 \leq 6 \quad \text{これを解いて} \quad a \leq \frac{5}{2}$$

$f(x) = ax^2 + x - a$ について, 不等式

$$f(x) \leq 3x^2 - 1 \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (*)$$

の等号が成立するのは, 2つの2次関数 $y = f(x)$

および $y = 3x^2 - 1$ のグラフから, $-1 < x < 1$

において, これらの放物線が接するときである.

2式から y を消去すると

$$(a - 3)x^2 + x - a + 1 = 0 \quad (**)$$

$a \neq 3$, $D = 1 - 4(a - 3)(-a + 1) = 0$ より

$$4a^2 - 16a + 13 = 0 \quad a \leq \frac{5}{2} \text{ に注意して} \quad a = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$$

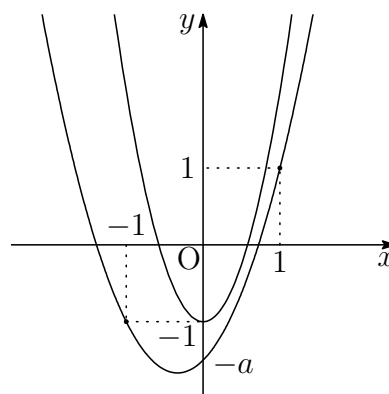
この a の値に対する $(**)$ の重解 $x = -\frac{1}{2(a - 3)}$, すなわち, $x = 2 - \sqrt{3}$ は $-1 < x < 1$ を満たす.

2つのグラフから, $a = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$ が $(*)$ を満たす a の最小値である.

したがって, a の取り得る値の範囲は $\frac{4 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{5}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 (2ax + 1)^2 dx = \int_{-1}^1 (4a^2x^2 + 4ax + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (4a^2x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{4a^2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{8}{3}a^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } \frac{19 - 8\sqrt{3}}{4} \leq a^2 \leq \frac{25}{4} \text{ であるから } \frac{44 - 16\sqrt{3}}{3} \leq I \leq \frac{56}{3}$$



2 2直線 $x + 3y = a$, $3x + y = b$ の交点を P とすると $P\left(\frac{3b-a}{8}, \frac{3a-b}{8}\right)$

(i) $\frac{a}{3} \leq b$, $\frac{b}{3} \leq a$, すなわち, $a \leq 3b$, $b \leq 3a$ のとき

$$(x, y) = \left(\frac{3b-a}{8}, \frac{3a-b}{8}\right) \text{ で 最小値 } \frac{a+b}{4}$$

(ii) $a \geq 0$, $b \leq \frac{a}{3}$, すなわち, $a \geq 0$, $3b \leq a$, のとき

$$(x, y) = \left(0, \frac{a}{3}\right) \text{ で 最小値 } \frac{a}{3}$$

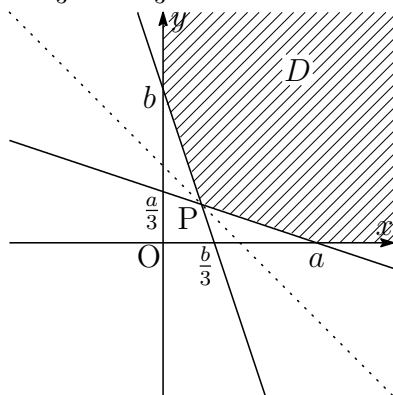
(iii) $a \leq 0$, $b \leq 0$ のとき

$$(x, y) = (0, 0) \text{ で 最小値 } 0$$

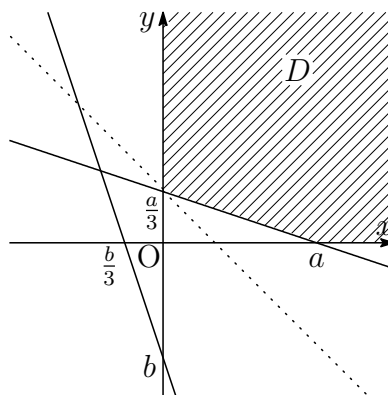
(iv) $b \geq 0$, $a \leq \frac{b}{3}$, すなわち, $b \geq 0$, $3a \leq b$ のとき

$$(x, y) = \left(\frac{b}{3}, 0\right) \text{ で 最小値 } \frac{b}{3}$$

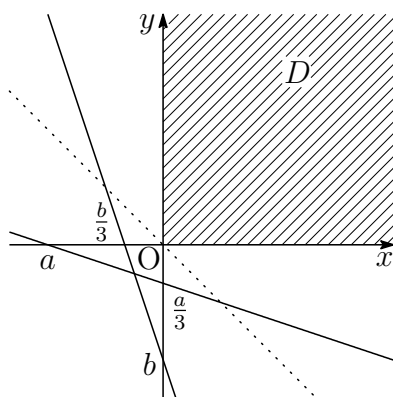
(i) $\frac{a}{3} \leq b$, $\frac{b}{3} \leq a$



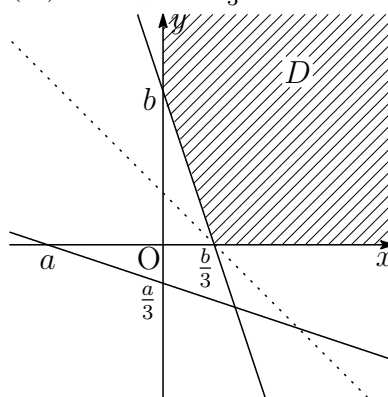
(ii) $a \geq 0$, $b \leq \frac{a}{3}$



(iii) $a \leq 0$, $b \leq 0$



(iv) $b \geq 0$, $a \leq \frac{b}{3}$



別解 $(x, y) \in D$ について, $x + y$ の取り得る値を k とすると

$$x + y = k, \quad x + 3y \geq a, \quad 3x + y \geq b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

を満たす点 (x, y) が存在する. このとき, y を消去して得られる 4 つの不等式

$$x + 3(k - x) \geq a, \quad 3x + (k - x) \geq b, \quad x \geq 0, \quad k - x \geq 0$$

すなわち
$$\frac{b - k}{2} \leq x \leq \frac{3k - a}{2}, \quad 0 \leq x \leq k \quad \cdots (*)$$

2 つの不等式 $(*)$ を同時に満たす x が存在するための条件は

$$\frac{b - k}{2} \leq \frac{3k - a}{2}, \quad 0 \leq k, \quad \frac{b - k}{2} \leq k, \quad 0 \leq \frac{3k - a}{2}$$

これらをそれぞれ k について解くと

$$k \geq \frac{a + b}{4}, \quad k \geq 0, \quad k \geq \frac{b}{3}, \quad k \geq \frac{a}{3} \quad (**)$$

k はこれら 4 つの不等式 $(**)$ を同時に満たすから, k の最小値は

$$\frac{a + b}{4}, \quad 0, \quad \frac{b}{3}, \quad \frac{a}{3}$$

の最大値である.

$$(i) \quad \frac{a + b}{4} \geq 0, \quad \frac{a + b}{4} \geq \frac{b}{3}, \quad \frac{a + b}{4} \geq \frac{a}{3}$$

$$\text{すなわち } a \leq 3b, \quad b \leq 3a \text{ のとき } \frac{a + b}{4}$$

$$(ii) \quad 0 \geq \frac{a + b}{4}, \quad 0 \geq \frac{b}{3}, \quad 0 \geq \frac{a}{3} \quad \text{すなわち } a \leq 0, \quad b \leq 0 \text{ のとき } 0$$

$$(iii) \quad \frac{b}{3} \geq \frac{a + b}{4}, \quad \frac{b}{3} \geq 0, \quad \frac{b}{3} \geq \frac{a}{3} \quad \text{すなわち } b \geq 0, \quad 3a \leq b \text{ のとき } \frac{b}{3}$$

$$(iv) \quad \frac{a}{3} \geq \frac{a + b}{4}, \quad \frac{a}{3} \geq 0, \quad \frac{a}{3} \geq \frac{b}{3} \quad \text{すなわち } a \geq 0, \quad 3b \leq a \text{ のとき } \frac{a}{3}$$

補足 $A \leq x \leq B, \quad C \leq x \leq D$ を同時に満たす x が存在するための条件は

$$A \leq B, \quad C \leq D, \quad A \leq D, \quad C \leq B$$



- 3** (1) 2次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解と係数の関係により $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 1$

$$s_1 = \alpha + \beta = 4$$

$$s_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$$

$$s_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) = 4 \cdot 14 - 1 \cdot 4 = 52$$

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha + \beta)(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}) \text{ より}$$

$$s_n = 4s_{n-1} - s_{n-2}$$

別解 $\alpha^2 = 4\alpha - 1, \beta^2 = 4\beta - 1$ より

$$\alpha^n = 4\alpha^{n-1} - \alpha^{n-2}, \beta^n = 4\beta^{n-1} - \beta^{n-2}$$

$$\text{したがって } \alpha^n + \beta^n = 4(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2})$$

$$\text{よって } s_n = 4s_{n-1} - s_{n-2}$$

- (2) (1) の結果の漸化式および s_1, s_2 が整数であるから、数学的帰納法により、すべての自然数 n について、 s_n は整数である。

$$s_1 \equiv 4, s_2 \equiv 4, s_3 \equiv 2 \pmod{10}$$

これを $s_n \equiv 4s_{n-1} - s_{n-2}$ に $n = 4, 5, 6, \dots$ と順次代入すると

$$s_4 \equiv 4 \cdot 2 - 4 \equiv 4, \quad s_5 \equiv 4 \cdot 4 - 2 \equiv 4, \quad s_6 \equiv 4 \cdot 4 - 4 \equiv 2 \pmod{10}$$

s_n を 10 で割った余りが、4, 4, 2 の周期 3 の循環であるから

$$s_{2003} = s_{3 \cdot 667 + 2} \equiv s_2 \equiv 4 \pmod{10}$$

よって、 s_{2003} の 1 の位は 4

- (3) 方程式の解は $(\alpha > \beta)$ $\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3}$

$$0 < \beta < 1 \text{ であるから } 0 < \beta^{2003} < 1$$

これに $\beta^{2003} = s_{2003} - \alpha^{2003}$ を代入すると

$$0 < s_{2003} - \alpha^{2003} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad s_{2003} - 1 < \alpha^{2003} < s_{2003}$$

s_{2003} の 1 の位が 4 であるから、 α^{2003} の 1 の位は 3



- 4 (1) a を出た目の数で割って余りが b になる確率を (a, b) と表記することにする.
 17 を出た目の数で割った余りは, $X_1 = \{0, 1, 2, 5\}$ であり

$$(17, 0) = \frac{1}{6}, \quad (17, 1) = \frac{2}{6}, \quad (17, 2) = \frac{2}{6}, \quad (17, 5) = \frac{1}{6}$$

2 回目の試行においても, その余りは $X_2 = \{0, 1, 2, 5\}$ であり

$$\begin{aligned} (0, 0) &= 1, & (1, 0) &= \frac{1}{6}, & (1, 1) &= \frac{5}{6}, & (2, 0) &= \frac{2}{6}, & (2, 2) &= \frac{4}{6}, \\ (5, 0) &= \frac{2}{6}, & (5, 1) &= \frac{2}{6}, & (5, 2) &= \frac{1}{6}, & (5, 5) &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

3 回目の試行も 2 回目と同様であるから, $X_3 = 0$ となる確率は

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= (17, 0)(0, 0)(0, 0) + (17, 1)\{(1, 0)(0, 0) + (1, 1)(1, 0)\} \\ &\quad + (17, 2)\{(2, 0)(0, 0) + (2, 2)(2, 0)\} \\ &\quad + (17, 5)\{(5, 0)(0, 0) + (5, 1)(1, 0) + (5, 2)(2, 0) + (5, 5)(5, 0)\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{6} \left(\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) + \frac{2}{6} \left(\frac{2}{6} \cdot 1 + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{6} \right) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} \right) = \frac{116}{216} = \frac{29}{54} \end{aligned}$$

- (2) $X_n = \{0, 1, 2, 5\}$ であるから ($n = 1, 2, \dots$)

$$a_n = P(X_n = 0), \quad b_n = P(X_n = 1), \quad c_n = P(X_n = 2), \quad d_n = P(X_n = 5)$$

とおくと, 次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6}, & b_1 &= \frac{2}{6}, & c_1 &= \frac{2}{6}, & d_1 &= \frac{1}{6} \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{6}c_n + \frac{2}{6}d_n, \\ b_{n+1} &= \frac{5}{6}b_n + \frac{2}{6}d_n, \\ c_{n+1} &= \frac{4}{6}c_n + \frac{1}{6}d_n, \\ d_{n+1} &= \frac{1}{6}d_n \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad d_n = d_1 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6^{n-1}} = \frac{1}{6^n}$$

補足 (1) はこの漸化式を用いて, $P(X_3 = 0) = a_3$ を求めてもよい.

(3) $b_n = P(X_n=1)$ を求めればよいから, (2) の結果より

$$b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{2}{6}d_n, \quad d_n = \frac{1}{6^n} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{2}{6^{n+1}}$$

$$b_n = \frac{q_n}{6^n} \text{ とおくと } q_{n+1} = 5q_n + 2, \quad q_1 = 6b_1 = 2$$

$$q_{n+1} + \frac{1}{2} = 5 \left(q_n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{ゆえに} \quad q_n + \frac{1}{2} = \left(q_1 + \frac{1}{2} \right) \cdot 5^{n-1} = \frac{5^n}{2}$$

$$\text{したがって } q_n = \frac{5^n - 1}{2} \quad \text{よって } b_n = \frac{q_n}{6^n} = \frac{5^n - 1}{2 \cdot 6^n}$$

