

平成13年度 東京大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文科(一類, 二類, 三類) 数I・II・A・B

問題 1 2 3 4

1 半径 r の球面上に4点 A, B, C, D がある. 四面体 $ABCD$ の各辺の長さは, $AB = \sqrt{3}$, $AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている. このとき r の値を求めよ.

2 時刻0に原点を出発した2点 A, B が xy 平面上を動く. 点 A の時刻 t での座標は $(t^2, 0)$ で与えられる. 点 B は, 最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ1で動くが, 点 $C(0, 3)$ に到達した後は, その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ1で動く.

$t > 0$ のとき, 三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく.

(1) 関数

$$S(t) \quad (t > 0)$$

のグラフの概形を描け.

(2) u を正の実数とするとき, $0 < t \leq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく. 関数

$$M(u) \quad (u > 0)$$

のグラフの概形を描け.

3 コインを投げる試行の結果によって, 数直線上にある2点 A, B を次のように動かす.

表が出た場合: 点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に1動かす. そうでないときは, A のみ正の方向に1動かす.

裏が出た場合: 点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に1動かす. そうでないときは, B のみ正の方向に1動かす.

最初2点 A, B は原点にあるものとし, 上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した座標をそれぞれ a, b とする.

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち, $a = b$ となる場合の数を X_n とおく. X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ.

(2) X_n を求めよ.

- 4 白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一直列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

解答例

1 2 辺 CD, AB の中点をそれぞれ M, N とし, 球の中心を O とする.

BC = BD より $\triangle BCM \equiv \triangle BDM$, AC = AD より $\triangle ACM \equiv \triangle ADM$

ゆえに, 平面 ABM は辺 CD の垂直二等分面で, O はこの平面上にある.

AC = BC より $\triangle ACN \equiv \triangle BCN$, AD = BD より $\triangle ADN \equiv \triangle BDN$

ゆえに, 平面 CDN は辺 AB の垂直二等分面で, O はこの平面上にある.

したがって, O は平面 ABM と平面 CDN の交線 MN 上にある.

また, OB = OC = OD であるから, O から平面 BCD に垂線 OH を引くと

$\triangle OBH \equiv \triangle OCH \equiv \triangle ODH$ ゆえに H は $\triangle BCD$ の外心

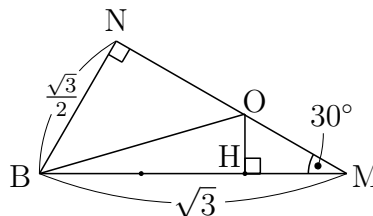
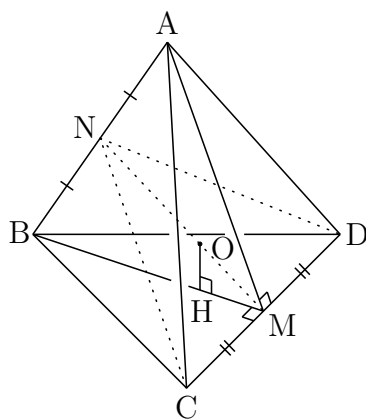
BC = BD = CD = 2 より, $\triangle BCD$ は正三角形であるから, H はその重心で,
H は BM を 2 : 1 に内分する.

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

AB = AM = BM = $\sqrt{3}$ であるから, $\triangle ABM$ は正三角形で, $\angle BMN = 30^\circ$

$$OH = MH \tan 30^\circ = \frac{1}{3}BM \tan 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } r = OB = \sqrt{BH^2 + OH^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$



2 (1) (i) $0 < t \leq 3$ のとき

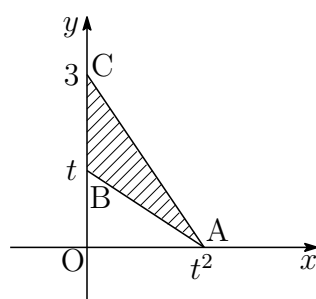
$$S(t) = \frac{1}{2}(3-t)t^2 = \frac{1}{2}(3t^2 - t^3)$$

$$S'(t) = \frac{1}{2}(6t - 3t^2) = \frac{3}{2}t(2-t)$$

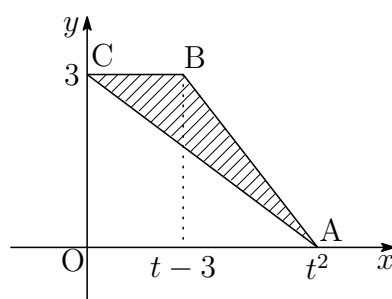
t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(ii) $3 \leq t$ のとき $S(t) = \frac{3}{2}(t-3)$

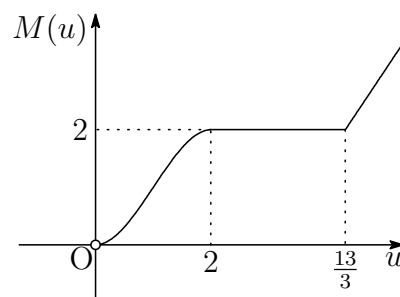
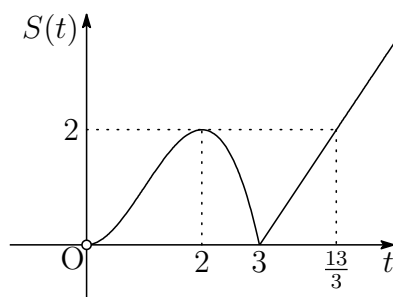
(i) $0 < t \leq 3$



(ii) $3 \leq t$



したがって、 $S(t)$ のグラフは、左下のとおり。



(2) (1) の結果から $0 < u \leq 2$ のとき $M(u) = S(u)$

$2 \leq u \leq \frac{13}{3}$ のとき $M(u) = 2$

$\frac{13}{3} \leq u$ のとき $M(u) = S(u)$

よって、 $M(u)$ のグラフの概形は、右上のとおりの。



- 3** (1) n 回コインを投げたとき, $a > b$ となる場合の数を A_n , $a < b$ となる場合の数を B_n とする. ルールにより

$$\text{表} \begin{cases} a > b \cdots \text{両方} + 1 \\ a \leq b \cdots a \text{ だけ} + 1 \end{cases} \quad \text{裏} \begin{cases} b > a \cdots \text{両方} + 1 \\ b \leq a \cdots b \text{ だけ} + 1 \end{cases}$$

したがって, n 回コインを投げた時点で

$$a = b + 1, \quad a = b, \quad a = b - 1$$

のいずれかであり, それぞれの場合の個数を A_n, X_n, B_n とする. このとき, 次の漸化式が成立する.

$$(*) \begin{cases} X_1 = 0, A_1 = 1, B_1 = 1, \\ X_{n+1} = A_n + B_n, \\ A_{n+1} = A_n + X_n, \\ B_{n+1} = B_n + X_n \end{cases}$$

$X_n + A_n + B_n = 2^n$ より, $(*)$ の第 3 式と第 4 式の辺々を加えると

$$A_{n+1} + B_{n+1} = X_n + (X_n + A_n + B_n)$$

$$\text{ゆえに } 2^{n+1} - X_{n+1} = X_n + 2^n \quad \text{よって} \quad X_{n+1} = 2^n - X_n$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } X_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{3} = - \left(X_n - \frac{2^n}{3} \right)$$

$$\text{ゆえに } X_n - \frac{2^n}{3} = (-1)^{n-1} \left(X_1 - \frac{2}{3} \right) \quad \text{よって} \quad X_n = \frac{2^n}{3} + \frac{2}{3}(-1)^n$$

別解 $X_n = (-1)^n x_n$ とおくと $x_1 = 0, \quad x_{n+1} - x_n = -(-2)^n$

$$n > 1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = - \sum_{k=1}^{n-1} (-2)^k$$

$$\text{したがって } x_n = \frac{2\{1 - (-2)^{n-1}\}}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}\{2 + (-2)^n\}$$

$$\text{上式は, } n = 1 \text{ のときも成立するから } X_n = \frac{1}{3}\{2(-1)^n + 2^n\} \quad \blacksquare$$

- 4 白石と黒石の並びにより， xy 座標平面上の格子点を移動する動点 P を考える．最初， P は $S(0, -1)$ にあり，白石のときは x 軸方向に $+1$ ，黒石のときは y 軸方向に $+1$ だけ移動するものとし，これらの移動をそれぞれ「 x 移動」「 y 移動」と呼ぶことにする．白石 180 個と黒石 181 個の並びにより，動点 P は x 移動と y 移動を繰り返して終点 $E(180, 180)$ に到達する．

P が E に到達する途中で必ず y 移動を行い，直線 $y = x$ 上の格子点を通過する．その格子点を $A(a, a)$ とすると，この y 移動を行う直前で， P は x 移動および y 移動を a 回ずつ，すなわち，白石と黒石がその時点で丁度 a 個ずつ並んでいる．よって，この y 移動を行った黒石とその右にある碁石をすべて除くとよい．

補足 P が S から E に移動する途中で， y 移動を行い，直線 $y = x$ を通過する黒石の個数が条件を満たす場合の数である． ■