# 平成 26 年度　筑波大学　２次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答 (数 II・B)，及び他教科との選択.
- 国際総合学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答.
  数 III・C 選択の場合は $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 1 題選択， $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択.
- 教育・障害学類　数 II・B 選択の場合は $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答.
  数 III 選択の場合は $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答．数 C 選択の場合は $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 必答.
- 心理学類 $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ 必答， $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答， $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア創生学類 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 必答， $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ から 1 題選択.
- 社会工学類 $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ 必答， $\boxed{1}$ $\boxed{4}$ から 1 題選択， $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ から 1 題選択， $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から 1 題選択.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = x^3 - x$ とする．$y = f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする．3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする．

(1) $\alpha + \beta + \gamma$，$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を $a$，$b$ を用いて表せ．

(2) 点 G の座標を $a$，$b$ を用いて表せ．

(3) 点 G の $x$ 座標が正で，$y$ 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $xy$ 平面上の曲線 $C : y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，以下の問いに答えよ．ただし $3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい．

(1) 曲線 $C$ と $x$ 軸の交点はただ 1 つであることを示せ．

(2) 曲線 $C$ と $x$ 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする．$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ．

(3) 曲線 $C$，$y$ 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれている部分の面積を $S$ とする．また，$xy$ 平面の原点 O，点 A および曲線 $C$ の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を $T$ とする．$S < T$ であることを示せ．

**3** 関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を $\ell_a$ とし，$\ell_a$ と $y$ 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，実数 $k$ に対して $\lim_{t\to\infty} t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい．

(1) $Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $0<a<b$ である $a$，$b$ に対して，$\ell_a$ と $\ell_b$ が $x$ 軸上で交わるとき，$a$ のとりうる値の範囲を求め，$b$ を $a$ で表せ．

(3) (2) の $a$，$b$ に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく．$\lim_{a\to+0} Z(a)$ および $\lim_{a\to+0} \frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ．

**4** 平面上の直線 $\ell$ に同じ側で接する 2 つの円 $C_1,\ C_2$ があり，$C_1$ と $C_2$ も互いに外接している．$\ell$，$C_1$，$C_2$ で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 $C_3$ を作る．同様に $\ell$，$C_n$，$C_{n+1}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を $C_{n+2}$ とする．円 $C_n$ の半径を $r_n$ とし，$x_n=\frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする．

(1) $\ell$ が $C_1$，$C_2$，$C_3$ と接する点を，それぞれ $\mathrm{A}_1$，$\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_3$ とおく．線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび $r_3$ の値を求めよ．

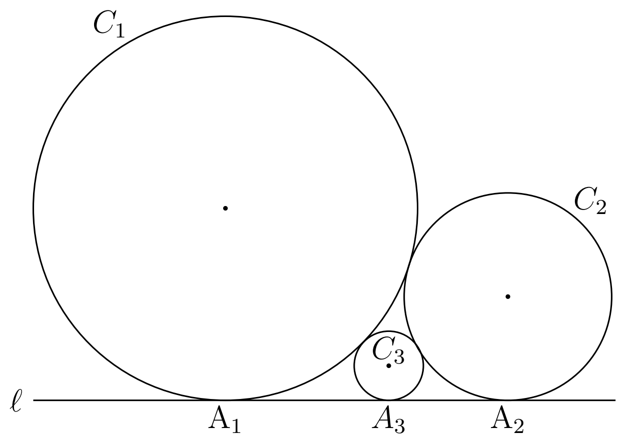
(2) ある定数 $a$，$b$ に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ となることを示せ．$a$，$b$ の値も求めよ．

(3) (2) で求めた $a$，$b$ に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を $\alpha,\ \beta$ $(\alpha>\beta)$ とする．$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 $c$，$d$ の値を求めよ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい．

(4) (3) の $c,\ d,\ \alpha,\ \beta$ に対して，

$$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ。



$\boxed{5}$ 実数を成分とする正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $AB = BA$ を満たす $A$ は，実数 $x$，$y$ を用いて $A = xB + yE$ と表せることを示せ．

(2) $A^3 = E$ のとき

$$(t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E$$

を示せ．ただし，$t = a + d$，$\Delta = ad - bc$ をとする．

(3) $AB = BA$ かつ $A^3 = E$ を満たす $A$ をすべて求めよ．

$\boxed{6}$ $xy$ 平面上に楕円

$$C_1 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (a > \sqrt{13})$$

および双曲線

$$C_2 : \ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0)$$

があり，$C_1$ と $C_2$ は同一の焦点をもつとする．また $C_1$ と $C_2$ の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1 + \frac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t > 0)$ における $C_1$，$C_2$ の接線をそれぞれ $\ell_1$，$\ell_2$ とする．

(1) $a$ と $b$ の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を $a$ を用いて表せ．

(2) $\ell_1$ と $\ell_2$ が直交することを示せ．

(3) $a$ が $a > \sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3-x$ より　$f'(x)=3x^2-1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=(3t^2-1)x-2t^3$$

これが点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るから

$$b=(3t^2-1)a-2t^3\quad \text{整理すると}\quad 2t^3-3at^2+a+b=0 \qquad (*)$$

この 3 次方程式の解が $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=\frac{3a}{2},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}}$$

(2) G の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$$\begin{aligned}
3X&=\alpha+\beta+\gamma=\frac{3a}{2},\\
3Y&=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\\
&=(\alpha^3-\alpha)+(\beta^3-\beta)+(\gamma^3-\gamma)\\
&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=\left(\frac{3a}{2}\right)\left\{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-3\cdot 0\right\}+3\left(-\frac{a+b}{2}\right)-\frac{3a}{2}\\
&=\frac{27}{8}a^3-3a-\frac{3b}{2}
\end{aligned}$$

したがって　$X=\dfrac{a}{2},\ Y=\dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{b}{2}$　よって　$\mathbf{G}\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{b}{2}\right)}$

(3) $(*)$ より，$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと

$$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

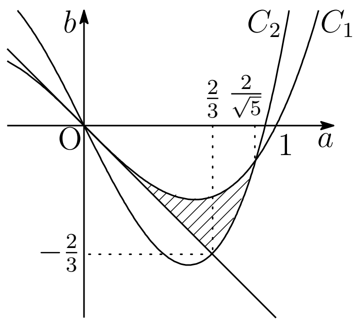
方程式 $(*)$ が相異なる 3 つの実数解をもつから，$g(0)g(a)<0$ より[1]

$$(a+b)(-a^3+a+b)<0 \qquad (**)$$

また，(2) の結果から

$$\frac{a}{2}>0,\quad \frac{9}{8}a^3-a-\frac{b}{2}<0 \quad \text{すなわち} \quad a>0,\quad b>\frac{9}{4}a^3-2a \qquad (***)$$

$C_1: b=a^3-a$，$C_2: b=\frac{9}{4}a^3-2a$ とすると，$(**)$，$(***)$ より，求める領域は，右の図の斜線部分で，境界線は含まない．




■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/CHdai/CHdai_2017.pdf (p.12 参照)

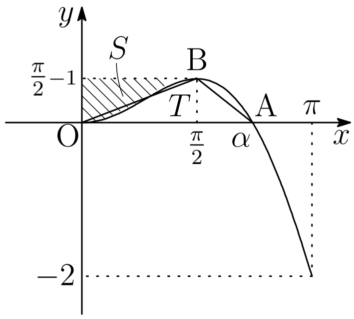
**2** (1) $f(x) = x\sin x + \cos x - 1$ とおくと $(0 < x < \pi)$ $f'(x) = x\cos x$

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $(\pi)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $(0)$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}-1$ | $\searrow$ | $(-2)$ |

したがって，増減表から

$$f(\alpha) = 0 \quad (0 < \alpha < \pi)$$

を満たす $\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ がただ 1 つ存在する．




(2) $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2} = \sqrt{3}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\dfrac{\pi}{3} > 1 > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) > 0$

したがって $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) > f(\alpha)$

区間 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ において，$f(x)$ は単調減少であるから $\dfrac{2\pi}{3} < \alpha$

(3) $S$ は右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x + \cos x - 1)\,dx \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - \Big[-x\cos x + 2\sin x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \end{aligned}$$

$T$ は，$\triangle$OAB の面積であるから

$$T = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

上の 2 式と (2) の結果から

$$\begin{aligned} T - S &= \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \\ &> \frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right) \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3} > 2 - \frac{1}{12}\left(\frac{16}{5}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{16}{5} = \frac{2}{25} > 0 \end{aligned}$$

よって $S < T$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ より　$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線 $\ell_a$ の方程式は

$$y-e^{-\frac{a^2}{2}}=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)$$

すなわち　$y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$　$\cdots(*)$

したがって　$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$

$$\begin{aligned}Y'(a)&=2ae^{-\frac{a^2}{2}}+(a^2+1)(-a)e^{-\frac{a^2}{2}}=(a-a^3)e^{-\frac{a^2}{2}} \qquad (**)\\&=-a(a+1)(a-1)e^{-\frac{a^2}{2}}\end{aligned}$$

| $a$ | $(0)$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $Y(a)$ | | $\nearrow$ | $\frac{2}{\sqrt{e}}$ | $\searrow$ |

また，$\displaystyle\lim_{a\to+0}Y(a)=1$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}Y(a)=0$　よって　$\boldsymbol{0<Y(a)\leqq\dfrac{2}{\sqrt{e}}}$

(2) $(*)$ より　$y=e^{-\frac{a^2}{2}}(-ax+a^2+1)$

したがって，$\ell_a$ の $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $(0<a<b)$

$$-ax+a^2+1=0\quad すなわち\quad x=\frac{a^2+1}{a}\quad\cdots①$$

同様に，$\ell_b$ の $x$ 軸との交点の $x$ 座標は　$x=\dfrac{b^2+1}{b}$　$\cdots②$

このとき，①，② が一致するから

$$\frac{a^2+1}{a}=\frac{b^2+1}{b}\quad ゆえに\quad (b-a)(ab-1)=0$$

このとき，$0<a<b$ より，$b-a\neq0$ であるから

$$ab-1=0\quad ゆえに\quad b=\frac{1}{a}>a>0$$

上の第 2 式から　$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{a},\ 0<a<1}$

(3) $b=\dfrac{1}{a}$ であるから，$a \to +0$ のとき　$b \to \infty$

$$\lim_{a\to+0} Y(a) = 1, \quad \lim_{b\to\infty} Y(b) = \lim_{b\to\infty}(b^2+1)e^{-\frac{b^2}{2}} = 0$$

このとき，$Z(a) = Y(a) - Y(b)$ について

$$\lim_{a\to+0} Z(a) = \lim_{a\to+0} Y(a) - \lim_{b\to\infty} Y(b) = 1 - 0 = \mathbf{1}$$

$Z(a) = Y(a) - Y(b)$ の両辺を $a$ について微分すると

$$\begin{aligned} Z'(a) &= Y'(a) - Y'(b)\cdot\frac{db}{da} = Y'(a) - Y'(b)\left(-\frac{1}{a^2}\right) \\ &= Y'(a) + b^2 Y'(b) \end{aligned}$$

したがって，$(**)$ により

$$\begin{aligned} \frac{Z'(a)}{a} &= \frac{Y'(a)}{a} + \frac{b^2Y'(b)}{a} = \frac{Y'(a)}{a} + b^3Y'(b) \\ &= (1-a^2)e^{-\frac{a^2}{2}} + b^2\cdot b^2(1-b^2)e^{-\frac{b^2}{2}} \end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{a\to+0}(1-a^2)e^{-\frac{a^2}{2}} = 1$，$\displaystyle\lim_{b\to\infty} b^2\cdot b^2(1-b^2)e^{-\frac{b^2}{2}} = 0$ であるから

$$\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a} = \mathbf{1}$$

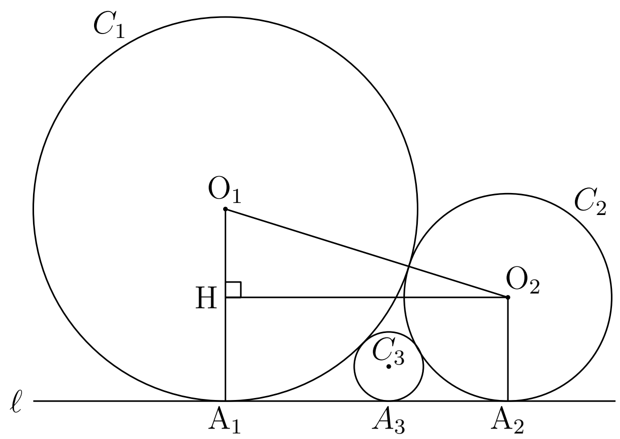
■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 図の直角三角形 $\mathrm{O_1O_2H}$ について，$\mathrm{O_1O_2} = r_1 + r_2$，$\mathrm{O_1H} = r_1 - r_2$ より

$$\mathrm{HO_2}^2 = \mathrm{O_1O_2}^2 - \mathrm{O_1H}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2$$

したがって　$\mathrm{A_1A_2} = \mathrm{HO_2} = 2\sqrt{r_1r_2} \cdots ①$

同様に　$\mathrm{A_1A_3} = 2\sqrt{r_1r_3} \cdots ②$，$\mathrm{A_2A_3} = 2\sqrt{r_2r_3} \cdots ③$




$\mathrm{A_1A_3} + \mathrm{A_2A_3} = \mathrm{A_1A_2}$ であるから，①，②，③ より

$$2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} = 2\sqrt{r_1r_2} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{r_3} = \frac{\sqrt{r_1r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \qquad (*)$$

$(*)$ を ②，③ に代入すると

$$\mathrm{A_1A_3} = \frac{2r_1\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}, \quad \mathrm{A_2A_3} = \frac{2r_2\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}$$

$r_1 = 16$，$r_2 = 9$ を ① および上の 2 式に代入すると

$$\mathbf{A_1A_2 = 24,} \quad \mathbf{A_1A_3 = \frac{96}{7},} \quad \mathbf{A_2A_3 = \frac{72}{7}}$$

また，$(*)$ に代入すると　$\sqrt{r_3} = \dfrac{12}{7}$　よって　$\boldsymbol{r_3 = \dfrac{144}{49}}$

(2) $(*)$ の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{\sqrt{r_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_1}}$

(1) で示した計算と同様にして　$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$

したがって　$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$　よって　$\boldsymbol{a = b = 1}$

(3) 2 次方程式 $t^2 = at + b$ は，$a = b = 1$ のとき　$t^2 = t + 1$

$\alpha$，$\beta$ はこの方程式の解であるから $(\alpha > \beta)$

$$\alpha^2 = \alpha + 1, \quad \beta^2 = \beta + 1 \qquad (**)$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

また，2 次方程式 $t^2 - t - 1 = 0$ の解と係数の関係および上式から

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{r_1}} = \dfrac{1}{4}$ および $(**)$ を $x_1 = c\alpha^2 + d\beta^2$ に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &= c(\alpha+1) + d(\beta+1) = c\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2} + d\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{3}{2}(c+d) + \frac{1}{2}(c-d)\sqrt{5}\end{aligned}$$

$c$, $d$ は有理数であるから　$\dfrac{3}{2}(c+d) = \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{1}{2}(c-d) = 0$

これを解いて　　$\boldsymbol{c = d = \dfrac{1}{12}}$

(4) $c = d = \dfrac{1}{12}$ より

$$c\alpha^3 + d\beta^3 = \frac{1}{12}(\alpha^3+\beta^3) = \frac{1}{12}\{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$
$$= \frac{1}{12}\{1^3 - 3\cdot(-1)(1)\} = \frac{1}{3} = x_2$$

(A) $x_n = \dfrac{1}{12}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$ とおく．

［1］$n = 1,\ 2$ のとき，(A) は成立する．

［2］$n \leqq k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$x_{k+1} = x_k + x_{k-1}$ より

$$x_{k+1} = \frac{1}{12}(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}) + \frac{1}{12}(\alpha^k+\beta^k)$$
$$= \frac{1}{12}(\alpha^{k+1}+\alpha^k) + \frac{1}{12}(\beta^{k+1}+\beta^k)$$

(∗∗) より，$\alpha^{k+1}+\alpha^k = \alpha^{k+2}$，$\beta^{k+1}+\beta^k = \beta^{k+2}$ であるから

$$x_{k+1} = \frac{1}{12}\alpha^{k+2} + \frac{1}{12}\beta^{k+2}$$

したがって，$n \leqq k+1$ のときも (A) は成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 $n$ について，(A) は成立する．

$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ より，$r_n = \dfrac{1}{{x_n}^2}$ であるから

$$r_n = \left(\frac{12}{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{144}{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})^2}}$$

別解 $x_{n+2} - (\alpha+\beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0$ より

$$x_{n+1} - \alpha x_n = \beta(x_n - \alpha x_{n-1})$$
$$= \beta^{n-1}(x_2 - \alpha x_1) = \beta^{n-1}(\alpha\beta)^2\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{12}\beta^{n+1}(4\alpha^2 - 3\alpha^3) = \frac{1}{12}(1-2\alpha)\beta^{n+1}$$
$$= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)\beta^{n+1},$$

同様に $x_{n+1} - \beta x_n = \dfrac{1}{12}(\alpha-\beta)\alpha^{n+1}$

上の 2 式から $x_{n+1}$ を消去して整理すると

$$x_n = \frac{1}{12}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $AB = BA$ より

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ c-d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix}$$

(1, 1), (2, 2) 成分から　$-b = c$

(1, 2), (2, 1) 成分から　$a-d = -b = c$

上の 2 式から，$c = -b$，$d = a+b$ とおくと

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix} &= b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= bB + (a-b)E \end{aligned}$$

(2) $A$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - tA + \Delta E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = tA - \Delta E$$

したがって　$A^3 = tA^2 - \Delta A = t(tA - \Delta E) - \Delta A$
$\qquad = (t^2 - \Delta)A - t\Delta E$

$A^3 = E$ より　$(t^2-\Delta)A - t\Delta E = E$　よって　$(t^2-\Delta)A = (t\Delta+1)E$

(3) $t^2 - \Delta \neq 0$ のとき，$A$ は $E$ のスカラー倍であるから，$A^3 = E$ より　$A = E$

$t^2 - \Delta = 0$ のとき，$t\Delta + 1 = 0$ であるから　$t = -1$，$\Delta = 1$　$\cdots(*)$

$AB = BA$ より，(1) の結果から，$A = xB + yE$ とおけるから

$$A = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x \\ -x & 2x+y \end{pmatrix} \qquad (**)$$

$(*)$ より　$3x + 2y = -1$，$(x+y)(2x+y) + x^2 = 1$

上の 2 式から $y$ を消去して整理すると　$x = \pm 1$

上の第 1 式より，$(x,\ y) = (1, -2),\ (-1,\ 1)$ であるから

$$\begin{aligned} &A = E,\ B - 2E,\ -B + E \\ &\quad = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

$\boxed{6}$ (1) $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1\ (a>\sqrt{13}),\quad C_2 : \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$

$C_1$，$C_2$ の焦点は，それぞれ　$(\sqrt{a^2-9},\ 0)$，$(\sqrt{4+b^2},\ 0)$

これらの焦点の座標が一致するから

$$\sqrt{a^2-9}=\sqrt{4+b^2}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{b^2=a^2-13}$$

点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ は $C_2$ 上にある．

また，点 P が $C_1$ にあるから　$\dfrac{4}{a^2}\left(1+\dfrac{t^2}{b^2}\right)+\dfrac{t^2}{9}=1$

ゆえに　$t^2=\dfrac{9b^2(a^2-4)}{36+a^2b^2}=\dfrac{9(a^2-13)(a^2-4)}{36+a^2(a^2-13)}=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}$

上式より，$\dfrac{t^2}{b^2}=\dfrac{t^2}{a^2-13}=\dfrac{9}{a^2-9}$ であるから $(a>\sqrt{13})$

$$2\sqrt{1+\frac{t^2}{b^2}}=2\sqrt{1+\frac{9}{a^2-9}}=\frac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$$

$t>0$ より，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ であるから　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}}\right)$

(2) $s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$ とすると　$\ell_1 : \dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{9}=1,\quad \ell_2 : \dfrac{sx}{4}-\dfrac{ty}{b^2}=1$

$\ell_1$，$\ell_2$ の法線ベクトルをそれぞれ，次のようにおく．

$$\vec{u}=\left(\frac{s}{a^2},\ \frac{t}{9}\right),\quad \vec{v}=\left(\frac{s}{4}, -\frac{t}{b^2}\right)$$

このとき　$\vec{u}\cdot\vec{v}=\dfrac{s^2}{4a^2}-\dfrac{t^2}{9b^2}=\dfrac{1}{4a^2}\cdot\dfrac{4a^2}{a^2-9}-\dfrac{1}{9(a^2-13)}\cdot\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}=0$

したがって　$\vec{u}\perp\vec{v}$　よって　$\ell_1\perp\ell_2$

(3) $s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ より $(a>\sqrt{13})$

$$s^2=\frac{4a^2}{a^2-9}=4+\frac{36}{a^2-9}$$
$$t^2=\frac{9(a^2-13)}{a^2-9}=9-\frac{36}{a^2-9}$$

上の 2 式から　　$s^2+t^2=13$

また，$a>\sqrt{13}$ より，$0<\dfrac{36}{a^2-9}<9$ であるから

$$2<s<\sqrt{13},\quad 0<t<3$$

よって，求める点 P の軌跡は，下の図の実線部分である．
ただし，○ は含まない．