

平成 25 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 心理学類 1 4 必答, 2 3 5 6 から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア
創生学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類 1 2 3 から 1 題選択, 4 5 6 から 1 題選択.

1 $f(x)$, $g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく.

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ.

(2) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ.

(3) $2\cos\frac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ.

2 n は自然数とする.

(1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) 媒介変数 t によって

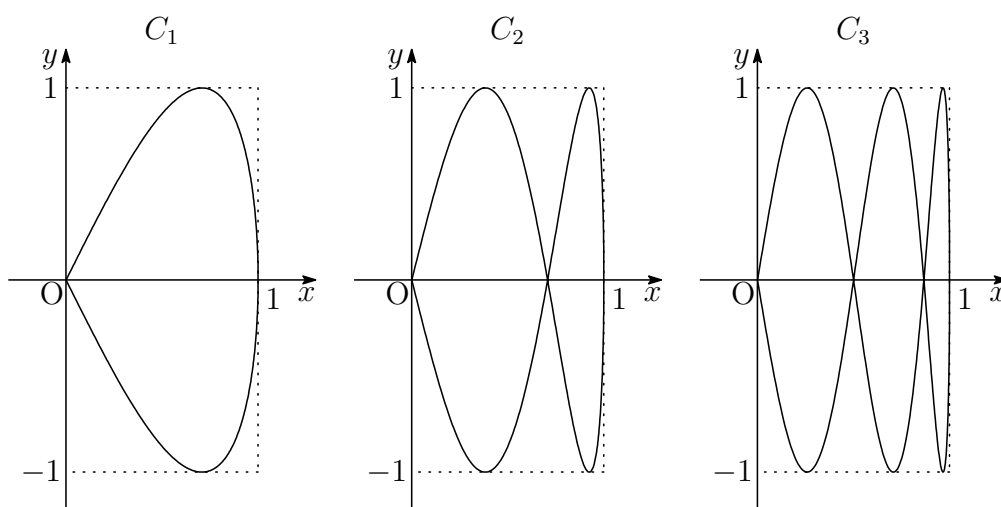
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ. ただし, 必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

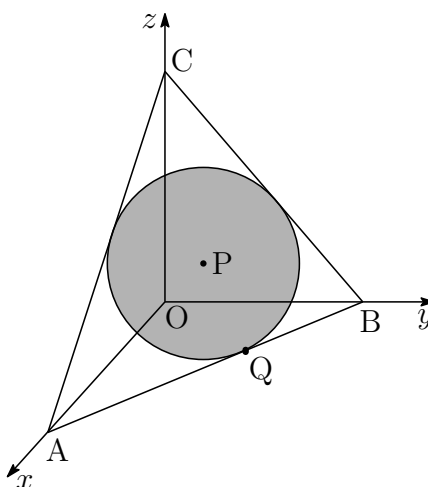
を用いてよい.

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.



- 3 xyz 空間において, 点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり, 正三角形 ABC に内接する円板を D とする. 円板 D の中心を P , 円板 D と辺 AB の接点を Q とする.

- (1) 点 P と点 Q の座標を求めよ.
- (2) 円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ.
- (3) 円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき, その線分の長さを t を用いて表せ.
- (4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ.



- 4 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

および $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ を満たすとする. ただし, a , b , c は定数とする.

- (1) $p_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.
- (2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ.
- (3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする. $a + b + c$ が奇数であれば, すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ.

5 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ. ただし, a, b, c, d は実数とする.

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ.

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ.

(3) (2) で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ.

6 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の, 直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を ℓ_1, ℓ'_1 とし, ℓ_1, ℓ'_1 に直交する C の 2 接線を ℓ_2, ℓ'_2 とする.

(1) ℓ_1 と ℓ'_1 の方程式を m を用いて表せ.

(2) ℓ_1 と ℓ'_1 の距離 d_1 および ℓ_2 と ℓ'_2 の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ. ただし, 平行な 2 直線 ℓ, ℓ' の距離とは, ℓ の 1 点と直線 ℓ' の距離である.

(3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ.

(4) $\ell_1, \ell'_1, \ell_2, \ell'_2$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ. さらに m が変化するとき, S の最大値を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, $g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$ より

$$\begin{aligned}
 2g(t) - 1 &= 2(\cos 3t - \cos 2t + \cos t) - 1 \\
 &= 2\cos 3t - 2\cos 2t + 2\cos t - 1 \\
 &= 2(4\cos^3 t - 3\cos t) - 2(2\cos^2 t - 1) + 2\cos t - 1 \\
 &= 8\cos^3 t - 4\cos^2 t - 4\cos t + 1 \\
 &= (2\cos t)^3 - (2\cos t)^2 - 2 \cdot 2\cos t + 1 \\
 &= f(2\cos t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad 2g(\theta) \cos \theta &= 2(\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos \theta) \cos \theta \\
 &= 2\cos 3\theta \cos \theta - 2\cos 2\theta \cos \theta + 2\cos^2 \theta \\
 &= (\cos 4\theta + \cos 2\theta) - (\cos 3\theta + \cos \theta) + \cos 2\theta + 1 \\
 &= \cos 4\theta - \cos 3\theta + 2\cos 2\theta - \cos \theta + 1
 \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{7}$ より, $\cos 4\theta = -\cos 3\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
 2g(\theta) \cos \theta &= -2\cos 3\theta + 2\cos 2\theta - \cos \theta + 1 \\
 &= 1 + \cos \theta - 2(\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos \theta) \\
 &= 1 + \cos \theta - 2g(\theta)
 \end{aligned}$$

(3) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, (2) の結果から

$$\{2g(\theta) - 1\}(1 + \cos \theta) = 0$$

$1 + \cos \theta \neq 0$ であるから $2g(\theta) - 1 = 0$

したがって, (1) の結果から $f(2\cos \theta) = 0$

よって, $2\cos \frac{\pi}{7}$ は, 3次方程式 $f(x) = 0$ の解である.

別解 $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $w = \cos \theta + i \sin \theta$ とすると, $w^7 + 1 = 0$ より

$$(w + 1)(w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1) = 0$$

$w + 1 \neq 0$ であるから

$$w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1 = 0$$

上式の実部に注目すると

$$\cos 6\theta - \cos 5\theta + \cos 4\theta - \cos 3\theta + \cos 2\theta - \cos \theta + 1 = 0$$

$\cos 6\theta = -\cos \theta$, $\cos 5\theta = -\cos 2\theta$, $\cos 4\theta = -\cos 3\theta$ であるから

$$-2 \cos 3\theta + 2 \cos 2\theta - 2 \cos \theta + 1 = 0$$

$$2(\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos \theta) - 1 = 0$$

したがって $2g(\theta) - 1 = 0$ (1) の結果から $f(2 \cos \theta) = 0$

よって, $2 \cos \frac{\pi}{7}$ は, 3 次方程式 $f(x) = 0$ の解である. ■

2 (1) $I_k = \int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \{\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t\} \, dt$ とおくと

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{1}{2(2n+1)} \left[\cos(2nt + t) \right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} - \frac{1}{2(2n-1)} \left[\cos(2nt - t) \right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \\ &= -\frac{1}{2(2n+1)} \left\{ \cos \left(k\pi + \frac{k}{2n}\pi \right) - \cos \left((k-1)\pi + \frac{k-1}{2n}\pi \right) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2(2n-1)} \left\{ \cos \left(k\pi - \frac{k}{2n}\pi \right) - \cos \left((k-1)\pi - \frac{k-1}{2n}\pi \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2(2n+1)} \left\{ (-1)^k \cos \frac{k}{2n}\pi - (-1)^{k-1} \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2(2n-1)} \left\{ (-1)^k \cos \frac{k}{2n}\pi - (-1)^{k-1} \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right\} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) + \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) \end{aligned}$$

別解 $I_k = \int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt$ とし, $u = 2nt - (k-1)\pi$ とおくと

$$\frac{du}{dt} = 2n \quad \begin{array}{c|c|c} t & \frac{k-1}{2n}\pi & \longrightarrow \frac{k}{2n}\pi \\ \hline u & 0 & \longrightarrow \pi \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2n} \int_0^\pi \sin\{u + (k-1)\pi\} \cos \frac{u + (k-1)\pi}{2n} \, du \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2n} \int_0^\pi \sin u \cos \frac{u + (k-1)\pi}{2n} \, du \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{4n} \int_0^\pi \left\{ \sin \left(\frac{2n+1}{2n}u + \frac{k-1}{2n}\pi \right) + \sin \left(\frac{2n-1}{2n}u - \frac{k-1}{2n}\pi \right) \right\} \, du \\ &= \frac{(-1)^k}{2(2n+1)} \left[\cos \left(\frac{2n+1}{2n}u + \frac{k-1}{2n}\pi \right) \right]_0^\pi \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{2(2n-1)} \left[\cos \left(\frac{2n-1}{2n}u - \frac{k-1}{2n}\pi \right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^k}{2(2n+1)} \left\{ \cos \left(\pi + \frac{k}{2n}\pi \right) - \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right\} \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{2(2n-1)} \left\{ \cos \left(\pi - \frac{k}{2n}\pi \right) - \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right\} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n+1)} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) \\ &\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{2(2n-1)} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) \\ &= (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right) \end{aligned}$$

- (2) $\sin(\pi - t) = \sin t$, $\sin 2n(\pi - t) = -\sin 2nt$ より, 曲線 C_n の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ の部分は x 軸に関して対称である.

$x = \sin t$, $y = \sin 2nt$ より

$$\begin{aligned}
 \frac{S_n}{2} &= \int_0^1 |y| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |y| \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2nt| \cos t dt \\
 &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{\frac{k-1}{2n}}^{\frac{k}{2n}} \sin 2nt \cos t dt \right| = \sum_{k=1}^n |I_k| \\
 &= \frac{2n}{4n^2 - 1} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k}{2n} \pi + \cos \frac{k-1}{2n} \pi \right) \\
 &= \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n} \pi + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n} \pi \right) \\
 &= \frac{2n}{4n^2 - 1} \left(2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n} \pi + 1 \right) = \frac{2n}{4n^2 - 1} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}}
 \end{aligned}$$

よって
$$S_n = \frac{4n}{(4n^2 - 1) \tan \frac{\pi}{4n}}$$

- (3) (2) の結果から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n^2}{(4n^2 - 1)\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan \frac{\pi}{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan \frac{\pi}{4n}} = \frac{4}{\pi}$$

補足 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{2n} \pi &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4n}} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{2n} \pi \sin \frac{\pi}{4n} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{2k+1}{4n} \pi - \sin \frac{2k-1}{4n} \pi \right) \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \left(\sin \frac{2n+1}{4n} \pi - \sin \frac{\pi}{4n} \right) \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \left(\cos \frac{\pi}{4n} - \sin \frac{\pi}{4n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

■

- 3** (1) $\triangle ABC$ は正三角形であるから、点 P は $\triangle ABC$ の重心である。

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{よって} \quad P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

また、点 Q は線分 AB の中点である。

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{よって} \quad Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

- (2) 点 P に関して点 Q と対称な点を R とすると $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = 2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$$

よって、求める t の値の範囲は $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$

- (3) $\overrightarrow{QP} = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

線分 QR 上の点 T の z 座標が t であるとき

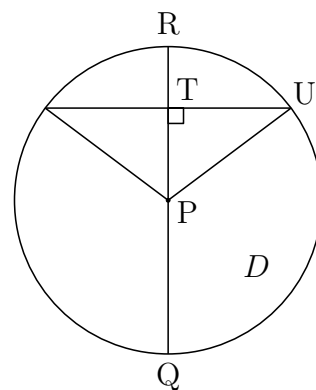
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OQ} + t\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2}, t\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{1-t}{2}, \frac{1-t}{2}, t\right) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{t}{2}, \frac{1}{6} - \frac{t}{2}, t - \frac{1}{3}\right) = (3t-1)\overrightarrow{QP} \end{aligned}$$

右の図において $|\overrightarrow{PU}| = |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$ より

$$\begin{aligned} TU^2 &= |\overrightarrow{PU}|^2 - |\overrightarrow{PT}|^2 = |\overrightarrow{QP}|^2 - (3t-1)^2|\overrightarrow{QP}|^2 \\ &= \frac{1}{6}\{1 - (3t-1)^2\} = t - \frac{3}{2}t^2 \end{aligned}$$

よって、求める線分の長さは $2TU = 2\sqrt{t - \frac{3}{2}t^2}$



- (4) z 軸上に点 $T'(0, 0, t)$ をとると, $\angle T'TU = 90^\circ$ であるから, 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{2}{3}} (T'U^2 - T'T^2) dt = \int_0^{\frac{2}{3}} TU^2 dt = \int_0^{\frac{2}{3}} \left(t - \frac{3}{2}t^2\right) dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{2}{3}} t \left(\frac{2}{3} - t\right) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{27}\end{aligned}$$

よって $V = \frac{2}{27}\pi$ ■

4 (1) (*) $\begin{cases} a_{n+1} = -b_n - c_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_{n+1} = -c_n - a_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ c_{n+1} = -a_n - b_n & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$

(*) の 3 式の辺々を加えると

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = -2(a_n + b_n + c_n) \quad \text{すなわち} \quad p_{n+1} = -2p_n$$

$p_1 = a + b + c$ であるから, $p_n = (a + b + c)(-2)^{n-1}$ より

$$S_n = \sum_{k=1}^n p_k = (a + b + c) \cdot \frac{1 - (-2)^n}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}(a + b + c)\{1 - (-2)^n\}$$

- (2) (*) の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n \quad \text{ゆえに} \quad a_n - b_n = a - b \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{同様にして} \quad b_n - c_n = b - c \quad \dots \textcircled{2}, \quad c_n - a_n = c - a \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{また, (1) の結果から} \quad a_n + b_n + c_n = (a + b + c)(-2)^{n-1} \quad \dots (**)$$

(**) + ① - ③ より

$$\begin{aligned}3a_n &= (a + b + c)(-2)^{n-1} + 2a - b - c \\ &= 3a + (a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}\end{aligned}$$

よって $a_n = a + \frac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}$

同様に $b_n = b + \frac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}$

$$c_n = c + \frac{1}{3}(a + b + c)\{(-2)^{n-1} - 1\}$$

(3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$, $T_n = \sum_{j=1}^{2n} q_j$ について

(A) 「 T_n は正の奇数である」

[1] $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} T_1 &= -\{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2\} + (-1)^2\{(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2\} \\ &= -(a^2 + b^2 + c^2) + (-b - c)^2 + (-c - a)^2 + (-a - b)^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \\ &= (a + b + c)^2 \end{aligned}$$

$a + b + c$ は奇数であるから, T_1 は正の奇数である.

よって, $n = 1$ のとき, (A) は成立する.

[2] $n = k$ のとき, T_k が正の奇数であると仮定すると

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \sum_{j=1}^{2(k+1)} q_j = \sum_{j=1}^{2k} q_j + q_{2k+1} + q_{2k+2} \\ &= T_k + q_{2k+1} + q_{2k+2} \end{aligned} \quad (***)$$

ここで

$$\begin{aligned} q_{2k+1} + q_{2k+2} &= (-1)^{2k+1}\{(a_{2k+1})^2 + (b_{2k+1})^2 + (c_{2k+1})^2\} \\ &\quad + (-1)^{2k+2}\{(a_{2k+2})^2 + (b_{2k+2})^2 + (c_{2k+2})^2\} \\ &= -\{(a_{2k+1})^2 + (b_{2k+1})^2 + (c_{2k+1})^2\} + (-b_{2k+1} - c_{2k+1})^2 \\ &\quad + (-c_{2k+1} - a_{2k+1})^2 + (-a_{2k+1} - b_{2k+1})^2 \\ &= a_{2k+1}^2 + b_{2k+1}^2 + c_{2k+1}^2 \\ &\quad + 2a_{2k+1}b_{2k+1} + 2b_{2k+1}c_{2k+1} + 2c_{2k+1}a_{2k+1} \\ &= (a_{2k+1} + b_{2k+1} + c_{2k+1})^2 = (p_{2k+1})^2 \\ &= \{(a + b + c)(-2)^{2k}\}^2 = (a + b + c)^2 \cdot 2^{4k} \end{aligned}$$

$q_{2k+1} + q_{2k+2}$ は, 偶数であるから, (***) より, T_{k+1} は奇数となる.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (A) は成立する. ■

5 (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = -1$$

よって、これを満たす行列 A は存在しない.

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad |A|^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad |A| = \pm 1$$

(i) $|A| = 1$ のとき, ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - (\text{tr}A)A + E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\text{tr}A)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって $(\text{tr}A)^2|A| = 2$ ゆえに $\text{tr}A = \pm\sqrt{2}$

$$\text{よって} \quad A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $|A| = -1$ のとき, ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - (\text{tr}A)A - E = O \quad \text{ゆえに} \quad (\text{tr}A)A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって $(\text{tr}A)^2|A| = 2$ ゆえに $-(\text{tr}A)^2 = 2$

よって、これを満たす行列 A は存在しない.

$$(i),(ii) \text{ より } A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

補足 A, B を 2 次の正方行列, k を定数とすると, 次式が成立する.

$$|AB| = |A||B|, \quad |A^2| = |A|^2, \quad |kA| = k^2|A|$$

$$(3) \ A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ より, } A^4 = -E \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} & E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 \\ &= E + A + A^2 + A^3 + A^4(E + A + A^2 + A^3) \\ &= E + A + A^2 + A^3 - E(E + A + A^2 + A^3) = O, \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{2013} A^k = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + \sum_{k=6}^{2013} A^k$$

$$\text{このとき } A^2 = (\text{tr} A)A - E,$$

$$\begin{aligned} A^3 &= (\text{tr} A)A^2 - A = (\text{tr} A)\{(\text{tr} A)A - E\} - A \\ &= \{(\text{tr} A)^2 - 1\}A - (\text{tr} A)E = A - (\text{tr} A)E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 &= A + A^2 + A^3 - E - A \\ &= -E + A^2 + A^3 \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + A - (\text{tr} A)E \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mp \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=6}^{2013} A^k &= A^6 \sum_{k=0}^{2007} A^k \\ &= A^6 \sum_{k=0}^{250} A^{8k} (E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7) = O \end{aligned}$$

$$\text{よって, } A = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ のとき (複号同順)}$$

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2013} = \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{補足 } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \text{ と考えてもよい.} \quad \blacksquare$$

- 6 (1) 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ に接する傾き m の直線を $y = mx + k$ とおき, 2 式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}(mx + k)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)x^2 + 2mkx + k^2 - 9 = 0$$

このとき, 上の第 2 式の係数について

$$\begin{aligned} D/4 &= (mk)^2 - \left(m^2 + \frac{9}{16}\right)(k^2 - 9) = 0 \\ &\quad -\frac{9}{16}k^2 + 9\left(m^2 + \frac{9}{16}\right) = 0 \end{aligned}$$

これを k について解くと $k = \pm\sqrt{16m^2 + 9}$

よって, ℓ_1, ℓ'_1 の方程式は $y = mx \pm \sqrt{16m^2 + 9}$

- (2) 点 $(x_0, mx_0 - \sqrt{16m^2 + 9})$ から直線 $mx - y + \sqrt{16m^2 + 9} = 0$ までの距離が d_1 に等しいから

$$d_1 = \frac{|mx_0 - (mx_0 - \sqrt{16m^2 + 9}) + \sqrt{16m^2 + 9}|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{16m^2 + 9}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

d_2 は上式の m を $-\frac{1}{m}$ に置き換えたものであるから

$$d_2 = \frac{2\sqrt{9m^2 + 16}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

- (3) (2) の結果から

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 = \frac{4(16m^2 + 9)}{m^2 + 1} + \frac{4(9m^2 + 16)}{m^2 + 1} = 100$$

- (4) $S = d_1 d_2$ であるから, (3) の結果から

$$S = d_1 \sqrt{100 - (d_1)^2}$$

上式から $S = \sqrt{100(d_1)^2 - (d_1)^4} = \sqrt{50^2 - (d_1^2 - 50)^2} \quad \dots (*)$

$d_1^2 = 50$ のとき $\frac{4(16m^2 + 9)}{m^2 + 1} = 50$ ゆえに $m = \pm 1$

(*) より, $m = \pm 1$ のとき, S は最大値 **50** をとる. ■