

平成 24 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 心理学類 1 4 必答, 2 3 5 6 から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア
創生学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類 1 2 3 から 1 題選択, 4 5 6 から 1 題選択.

1 x の方程式 $|\log_{10} x| = px + q$ (p, q は実数) が 3 つの相異なる正の解をもち, 次の 2 つの条件を満たすとする.

(I) 3 つの解の比は, $1 : 2 : 3$ である.

(II) 3 つの解のうち最小のものは, $\frac{1}{2}$ より大きく, 1 より小さい.

このとき, $A = \log_{10} 2$, $B = \log_{10} 3$ とおき, p と q を A と B を用いて表せ.

2 曲線 $C : y = \frac{1}{x+2}$ ($x > -2$) を考える. 曲線 C 上の点 $P_1 \left(0, \frac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし, ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1 , 点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく. 以下同様に, 自然数 n ($n \geq 2$) に対して, 点 P_n における接線を ℓ_n とし, ℓ_n と x 軸との交点を Q_n , 点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく.

(1) ℓ_1 の方程式を求めよ.

(2) P_n の x 座標を x_n ($n \geq 1$) とする. x_{n+1} を x_n を用いて表し, x_n を n を用いて表せ.

(3) ℓ_n , x 軸, y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

- 3** 曲線 $C: y = \log x$ ($x > 0$) を考える. 自然数 n に対して, 曲線 C 上に点 $P(e^n, n)$, $Q(e^{2n}, 2n)$ をとり, x 軸上に点 $A(e^n, 0)$, $B(e^{2n}, 0)$ をとる. 四角形 $APQB$ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $V(n)$ とする. また, 線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする.

(1) $V(n)$ を n の式で表せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ.

- 4** 四面体 $OABC$ において, 次が満たされているとする.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする. 点 O を通り平面 α と直交する直線と, 平面 α との交点を H とする.

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ.

(2) 点 H は $\triangle ABC$ の垂心であること, すなわち $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ を示せ.

(3) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1$ とする. このとき, $\triangle ABC$ の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ.

- 5** 以下の問いに答えよ.

(1) 座標平面において原点のまわりに角 θ ($0 < \theta < \pi$) だけ回転する移動を表す行列を A とする. A が等式 $A^2 - A + E = O$ を満たすとき, θ と A を求めよ. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である.

(2) 直線 $y = \sqrt{3}x$ に関する対称移動を表す行列 B を求めよ.

(3) 直線 $y = kx$ に関する対称移動を表す行列 C とする. (1), (2) において求めた行列 A, B に対して $BC = A$ が成り立つとき, k を求めよ.

- 6** 2つの双曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$, $H: x^2 - y^2 = -1$ を考える. 双曲線 H 上の点 $P(s, t)$ に対して, 方程式 $sx - ty = 1$ で定まる直線を ℓ とする.

(1) 直線 ℓ は点 P を通らないことを示せ.

(2) 直線 ℓ と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し, $\triangle PQR$ の重心 G の座標を s, t を用いて表せ.

(3) (2) における 3 点 G, Q, R に対して, $\triangle GQR$ の面積は点 $P(s, t)$ の位置によらず一定であることを示せ.

解答例

1 x の方程式

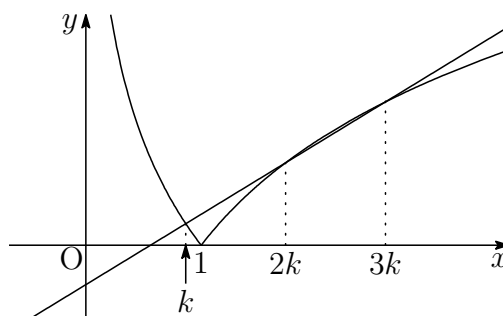
$$|\log_{10} x| = px + q$$

の 3 解を $k, 2k, 3k$ とおくと ($k > 0$)

$$-\log_{10} k = pk + q \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{10} 2k = 2pk + q \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\log_{10} 3k = 3pk + q \quad \cdots \textcircled{3}$$



$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より } \log_{10} 2k^2 = pk, \quad \textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ より } \log_{10} \frac{3}{2} = pk \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{上の 2 式から } 2k^2 = \frac{3}{2} \quad \text{このとき, } k > 0 \text{ に注意して } k = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{ を } \textcircled{4} \text{ に代入すると, } \log_{10} \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} p \text{ より}$$

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}}(\log_{10} 3 - \log_{10} 2) = \frac{2}{\sqrt{3}}(B - A)$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると, } -\log_{10} \frac{\sqrt{3}}{2} = \log_{10} \frac{3}{2} + q \text{ より}$$

$$q = 2 \log_{10} 2 - \frac{3}{2} \log_{10} 3 = 2A - \frac{3}{2}B$$

■

$$\textcircled{2} \quad (1) f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ とおくと } f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

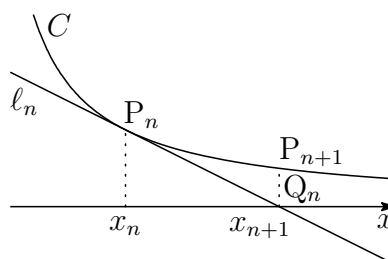
$$C \text{ 上の点 } P_1 \left(0, \frac{1}{2} \right) \text{ における接線 } \ell_1 \text{ の傾きは } f'(0) = -\frac{1}{4}$$

したがって, 接線 ℓ_1 の方程式は

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

- (2) C 上の点 $P_n \left(x_n, \frac{1}{x_n + 2} \right)$ における接線 ℓ_n の傾きは $f'(x_n) = -\frac{1}{(x_n + 2)^2}$ したがって、接線 ℓ_n の方程式は

$$y - \frac{1}{x_n + 2} = -\frac{1}{(x_n + 2)^2}(x - x_n) \quad (*)$$



点 $Q_n(x_{n+1}, 0)$ は、この直線上の点であるから

$$-\frac{1}{x_n + 2} = -\frac{1}{(x_n + 2)^2}(x_{n+1} - x_n) \quad \text{よって} \quad x_{n+1} = 2x_n + 2$$

上式より $x_{n+1} + 2 = 2(x_n + 2)$

数列 $\{x_n + 2\}$ は、初項 $x_1 + 2 = 0 + 2 = 2$ 、公比 2 の等比数列であるから

$$x_n + 2 = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad x_n = 2^n - 2$$

- (3) ℓ_n と y 軸との交点の y 座標は、(*) に $x = 0$ を代入して

$$y - \frac{1}{x_n + 2} = \frac{x_n}{(x_n + 2)^2} \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{2x_n + 2}{(x_n + 2)^2}$$

ℓ_n と x 軸との交点 Q_n の x 座標は $2x_n + 2$

したがって、 ℓ_n 、 x 軸、 y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}(2x_n + 2) \times \frac{2x_n + 2}{(x_n + 2)^2} = 2 \left(\frac{x_n + 1}{x_n + 2} \right)^2$$

- (2) の結果から、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{x_n + 1}{x_n + 2} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{1 + \frac{1}{x_n}}{1 + \frac{2}{x_n}} \right)^2 = 2$$

■

- 3** (1) 2点 $P(e^n, n)$, $Q(e^{2n}, 2n)$ を通る直線の方程式は

$$y = \frac{n}{e^{2n} - e^n}(x - e^n) + n$$

したがって、求める立体の体積 $V(n)$ は

$$\begin{aligned} \frac{V(n)}{\pi} &= \int_{e^n}^{e^{2n}} \left\{ \frac{n}{e^{2n} - e^n}(x - e^n) + n \right\}^2 dx \\ &= \frac{e^{2n} - e^n}{3n} \left[\left\{ \frac{n}{e^{2n} - e^n}(x - e^n) + n \right\}^3 \right]_{e^n}^{e^{2n}} \\ &= \frac{e^{2n} - e^n}{3n} \{(2n)^3 - n^3\} = \frac{7}{3}n^2(e^{2n} - e^n) \end{aligned}$$

よって
$$V(n) = \frac{7\pi}{3}n^2(e^{2n} - e^n)$$

別解 上底の半径 a , 下底の半径 b , 高さ h の円錐台の体積 V は¹

$$V = \frac{\pi}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

これに $a = n$, $b = 2n$, $h = e^{2n} - e^n$ を代入してもよい.

- (2) 曲線 $C: y = \log x$ と線分 AP , BQ , x 軸で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $U(n)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{U(n)}{\pi} &= \int_{e^n}^{e^{2n}} (\log x)^2 dx = \left[x \{ (\log x)^2 - 2 \log x + 2 \} \right]_{e^n}^{e^{2n}} \\ &= e^{2n}(4n^2 - 4n + 2) - e^n(n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n)}{\pi n^2 e^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 4 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - e^{-n} \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \right\} = 4 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V(n)}{\pi n^2 e^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{3} (1 - e^{-n}) = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

したがって
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n)}{V(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U(n)}{\pi n^2 e^{2n}} \cdot \frac{\pi n^2 e^{2n}}{V(n)} = 4 \times \frac{3}{7} = \frac{12}{7}$$

$S(n) = U(n) - V(n)$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{V(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{U(n)}{V(n)} - 1 \right\} = \frac{12}{7} - 1 = \frac{5}{7}$$

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou-2019.pdf> 1 の補足

- 4 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, 条件から $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$
 ゆえに $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 よって $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$

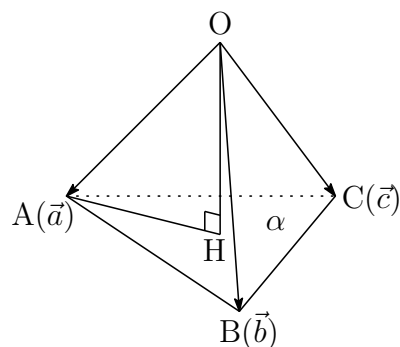
- (2) $\overrightarrow{OH} \perp \alpha$ より $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
 $\textcircled{1}$ より $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
 上の2式から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$

同様に $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$

よって, 点Hは $\triangle ABC$ の垂心である.



- (3) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$ より

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 + 2^2 = 6$$

ゆえに $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}$ 同様に $BC = CA = \sqrt{6}$

$OA = OB = OC$ であるから $\triangle OAH \equiv \triangle OBH \equiv \triangle OCH$

$AH = BH = CH$ であるから, Hは正三角形ABCの外心, すなわち, 重心である. $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OH}|^2 &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9}(2^2 + 2^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = 2 \end{aligned}$$

よって $OH = |\overrightarrow{OH}| = \sqrt{2}$



5 (1) $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ おくと, $A^2 - A + E = O$ より

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } (2 \cos \theta - 1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ であるから } 2 \cos \theta - 1 = 0$$

$$0 < \theta < \pi \text{ に注意して } \theta = \frac{\pi}{3}, \quad A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $B \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ より

$$B \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{よって} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $C \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} -k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ -1 \end{pmatrix}$ より

$$C \begin{pmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad C = \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix}$$

$BC = A$ より, $C = B^{-1}A$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+k^2} \begin{pmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2k}{1+k^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて } k = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

- 6** (1) 点 $P(s, t)$ は $H: x^2 - y^2 = -1$ 上の点であるから

$$s^2 - t^2 = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$P(s, t)$ が $\ell: sx - ty = 1$ 上にあると仮定すると $s^2 - t^2 = 1$
これは $\textcircled{1}$ に反するので、直線 ℓ は点 P を通らない。

- (2) $H: x^2 - y^2 = -1$ 上の点 $P(s, t)$ について $t \neq 0$

$$\ell: sx - ty = 1 \text{ より } y = \frac{sx - 1}{t} \quad \dots \textcircled{2}$$

これと $C: x^2 - y^2 = 1$ から y を消去して

$$x^2 - \left(\frac{sx - 1}{t}\right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2 - s^2)x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0$$

$\textcircled{1}$ を上式に代入して $x^2 + 2sx - t^2 - 1 = 0 \quad \dots (*)$

2次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = s^2 - (-t^2 - 1) = s^2 + t^2 + 1 > 0$$

よって、直線 ℓ と双曲線 C は異なる2点 Q, R で交わる。

Q, R の x 座標をそれぞれ α, β とすると、 $\textcircled{2}$ より

$$Q\left(\alpha, \frac{s\alpha - 1}{t}\right), \quad R\left(\beta, \frac{s\beta - 1}{t}\right)$$

α, β は方程式 $(*)$ の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2s, \quad \alpha\beta = -t^2 - 1 \quad \dots (**)$$

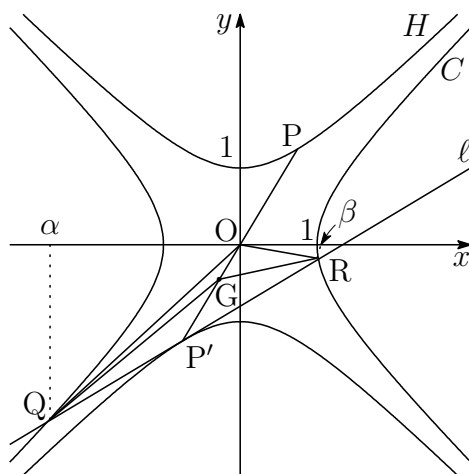
$\triangle PQR$ の重心 G の座標を (x_0, y_0) とすると、 $\textcircled{1}$, $(**)$ より

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{3}(s + \alpha + \beta) = \frac{1}{3}(s - 2s) = -\frac{s}{3} \\ y_0 &= \frac{1}{3}\left(t + \frac{s\alpha - 1}{t} + \frac{s\beta - 1}{t}\right) \\ &= \frac{t^2 + s(\alpha + \beta) - 2}{3t} = \frac{t^2 - 2(s^2 + 1)}{3t} = \frac{t^2 - 2t^2}{3t} = -\frac{t}{3} \end{aligned}$$

よって $G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)$

別解 ℓ は H' 上の点 $P'(-s, -t)$ における接線である. $\alpha + \beta = -2s$ より, P' は 2 点 Q, R の中点である. G は線分 PP' を $2:1$ に内分する点であるから

$$G\left(-\frac{s}{3}, -\frac{t}{3}\right)$$



(3) 直線 ℓ の y 切片が $-\frac{1}{t}$ であるから $\triangle OQR = \frac{1}{2|t|}|\beta - \alpha|$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, (**) \text{ より } (\beta - \alpha)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (-2s)^2 - 4(-t^2 - 1) \\ &= 4(s^2 + t^2 + 1) = 8t^2 \end{aligned}$$

$$|\beta - \alpha| = 2\sqrt{2}t \text{ であるから } \triangle OQR = \sqrt{2}$$

(2) の結果から, G は線分 OP' を $1:2$ に内分する点であるから

$$\triangle GQR = \frac{2}{3}\triangle OQR = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

よって, $\triangle GQR$ の面積は一定である. ■