

平成 23 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 心理学類 1 4 必答, 2 3 5 6 から 2 題選択.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学・応用理工・工学システム・情報科学・情報メディア
創生学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類 1 2 3 から 1 題選択, 4 5 6 から 1 題選択.

1 O を原点とする xy 平面において, 直線 $y = 1$ の $|x| \geq 1$ を満たす部分を C とする.

- (1) C 上に点 $A(t, 1)$ をとるとき, 線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ.
- (2) 点 A が C 全体を動くとき, 線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め, それを図示せよ.

2 自然数 n に対し, 関数

$$F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n} dt \quad (x \geq 0)$$

を考える.

- (1) 関数 $F_n(x)$ ($x \geq 0$) はただ一つの点で最大値をとることを示し, $F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ.
- (2) (1) で求めた a_n に対し, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n$ を求めよ.

- 3 α を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. 円 $C: x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ および, その中心を通る直線 $\ell: y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 直線 ℓ と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ.

(2) 等式

$$2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha \\ x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1 \end{cases}$$

の表す xy 平面上の図形を D とする. 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

- 4 数列 $\{a_n\}$ を,

$$a_1 = 1,$$

$$(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

によって定める.

(1) $b_n = n(n+1)(n+2)a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 等式

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n$$

が成り立つように, 定数 p, q, r の値を求めよ.

(3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を n の式で表せ.

- 5 実数を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える. 座標平面上の 2 点 $P(x, y)$, $Q(u, v)$ について等式

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成り立つとき, 行列 A により点 P は点 Q に移るという.

点 $(1, 3)$ は行列 A により点 $(10, 10)$ に移り, さらに等式

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

が成り立つものとする. ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 行列 A により点 $(10, 10)$ が移る点の座標を求めよ.
- (2) 実数 a, b, c, d の値を求めよ.
- (3) 次の条件 (*) を満たす直線 ℓ の方程式を求めよ.

(*) 直線 ℓ 上のすべての点が行列 A により ℓ 上の点に移る.

- 6 d を正の定数とする. 2 点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える. 点 A , 点 B , 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP , BP , OP と書く. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ.
- (2) $AP^2 + BP^2$ および $AP \cdot BP$ を, OP と d を用いて表せ.
- (3) 点 P が楕円 E 全体を動くとき, $AP^3 + BP^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ.

解答例

- 1 (1) A(t , 1). 線分 OA の垂直二等分線上に点 P(x , y) をとると,

$$OP^2 = AP^2 \text{ より } x^2 + y^2 = (x - t)^2 + (y - 1)^2$$

$$\text{整理すると } 2tx + 2y - t^2 - 1 = 0$$

- (2) (1) の結果から, t に関する 2 次方程式

$$t^2 - 2xt - 2y + 1 = 0$$

が $|t| \geq 1$ に (少なくとも 1 つ) 解をもつ領域 (x , y) を求めればよい.

$$f(t) = t^2 - 2xt - 2y + 1 \text{ とおくと}$$

$$f(t) = (t - x)^2 - x^2 - 2y + 1$$

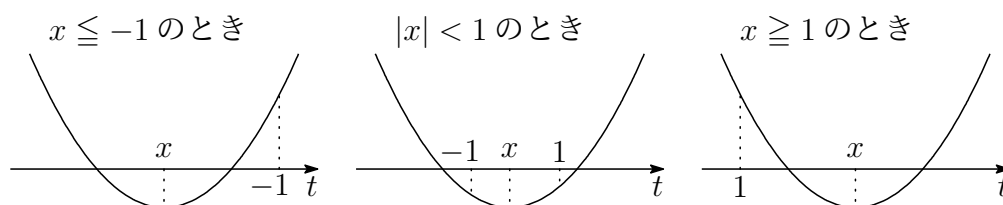
- (i) $|x| \geq 1$ のとき, $-x^2 - 2y + 1 \leq 0$ より

$$y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

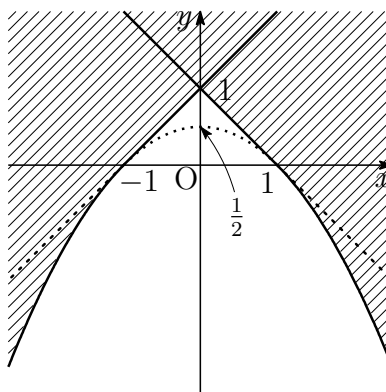
- (ii) $|x| < 1$ のとき, $f(-1) \leq 0$ または $f(1) \leq 0$ より

$$2x - 2y + 2 \leq 0 \text{ または } -2x - 2y + 2 \leq 0$$

$$\text{ゆえに } y \geq x + 1 \text{ または } y \geq -x + 1$$



- (i), (ii) より, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



2 (1) $F_n(x) = \int_x^{2x} e^{-t^n} dt \quad (x \geq 0)$ より

$$\begin{aligned} F'_n(x) &= e^{-(2x)^n} (2x)' - e^{-x^n} = \frac{2}{e^{(2x)^n}} - \frac{1}{e^{x^n}} \\ &= \frac{2 - e^{(2^n-1)x^n}}{e^{(2x)^n}} \end{aligned}$$

$F'_n(x) = 0$ とすると $2 - e^{(2^n-1)x^n} = 0$ ゆえに $e^{(2^n-1)x^n} = 2$
上の第2式の両辺の自然対数をとると

$$(2^n - 1)x^n = \log 2 \quad (*)$$

(*) を満たす x はただ一つ存在し、これを c とおくと

$$c = \sqrt[n]{\frac{\log 2}{2^n - 1}}$$

このとき、 $F_n(x)$ の増減表は

x	0	...	c	...
$F'_n(x)$		+	0	-
$F_n(x)$		↗	極大	↘

$F(x)$ は $x = c$ で最大となるから、 $a_n = c$ より $\mathbf{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log 2}{2^n - 1}}$

(2) (1) の結果から $a_n = \frac{1}{2} \sqrt[n]{\frac{\log 2}{1 - 2^{-n}}}$

したがって $\log a_n = -\log 2 + \frac{1}{n} \log \left(\frac{\log 2}{1 - 2^{-n}} \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\frac{\log 2}{1 - 2^{-n}} \right) = 0 \text{ であるから } \lim_{n \rightarrow \infty} \log \mathbf{a_n} = -\log 2 \quad \blacksquare$$

3 (1) 直線 $\ell : y = (\tan \alpha)x - \sin \alpha$ と $C : x^2 + (y + \sin \alpha)^2 = 1$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 + \{(\tan \alpha)x\}^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos^2 \alpha$$

求める交点の座標は、 $x = \cos \alpha, -\cos \alpha$ を直線 ℓ の方程式に代入して

$$(\cos \alpha, 0), (-\cos \alpha, -2 \sin \alpha)$$

(2) $\sqrt{1-x^2}$ は偶関数であるから

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + 2 \int_0^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は、半径 1 の $\frac{1}{4}$ 円の面積に等しいから

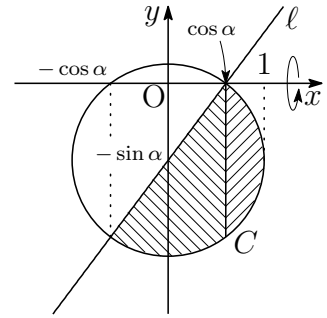
$$2 \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 1^2}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$(3) D: \begin{cases} y \leq (\tan \alpha)x - \sin \alpha \\ x^2 + (y + \sin \alpha)^2 \leq 1 \end{cases}$$

D の表す部分は、右の図の斜線部分である。
 C の方程式から

$$y = -\sin \alpha \pm \sqrt{1-x^2}$$

D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積
を V とすると



$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} (-\sin \alpha - \sqrt{1-x^2})^2 dx - \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \{(\tan \alpha)x - \sin \alpha\}^2 dx \\ &\quad + \int_{\cos \alpha}^1 \{(-\sin \alpha - \sqrt{1-x^2})^2 - (-\sin \alpha + \sqrt{1-x^2})^2\} dx \\ &= 2 \int_0^{\cos \alpha} (1 + \sin^2 \alpha - x^2) dx + 4(\sin \alpha) \int_0^{\cos \alpha} \sqrt{1-x^2} dx \\ &\quad - \frac{1}{3 \tan \alpha} \left[\{(\tan \alpha)x - \sin \alpha\}^3 \right]_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} + 4(\sin \alpha) \int_{\cos \alpha}^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 2 \left[(1 + \sin^2 \alpha)x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\cos \alpha} - \frac{8 \sin^3 \alpha}{3 \tan \alpha} + (4 \sin \alpha) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 2(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha - \frac{2}{3} \cos^3 \alpha - \frac{8}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha + 4(\sin \alpha) \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \left\{ 2(1 + \sin^2 \alpha) - \frac{2}{3} \cos^2 \alpha - \frac{8}{3} \sin^2 \alpha \right\} \cos \alpha + \pi \sin \alpha \\ &= \frac{4}{3} \cos \alpha + \pi \sin \alpha \end{aligned}$$

よって $V = \left(\frac{4}{3} \cos \alpha + \pi \sin \alpha \right) \pi$

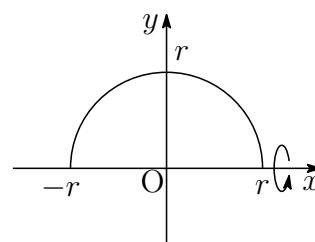
パップス・ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

平面上にある図形 D の面積を S とし, D と同じ平面上にあり D を通らない軸の周りで D を一回転させた回転体の体積を V とする. 回転させる図形 D の重心 G から回転軸までの距離を h とすると

$$V = 2\pi hS$$

が成立する.

右の半円は, y 軸に関して対称であるから, 重心の x 座標は 0 である. また重心の y 座標 h は, x 軸のまわりに 1 回転すると, その立体 (球) の体積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ と半円の面積 $S = \frac{1}{2}\pi r^2$ により



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi h \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \quad \text{ゆえに} \quad h = \frac{4r}{3\pi}$$

発展 半径 1 の半円 C の中心 P から重心 G までの距離は

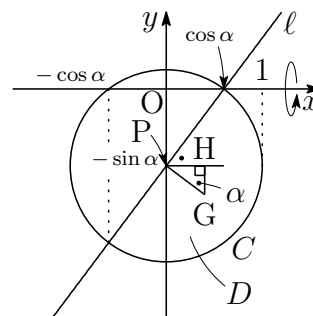
$$GP = \frac{4}{3\pi}$$

G から直線 $y = -\sin \alpha$ に垂線 GH を引くと

$$GH = GP \cos \alpha = \frac{4 \cos \alpha}{3\pi}$$

G から x 軸までの距離を h とすると

$$h = OP + GH = \sin \alpha + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi}$$



領域 D の面積 S は $\frac{\pi}{2}$ であるから, パップス=ギュルダンの定理により, 求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= 2\pi hS = 2\pi \left(\sin \alpha + \frac{4 \cos \alpha}{3\pi} \right) \frac{\pi}{2} \\ &= \left(\pi \sin \alpha + \frac{4}{3} \cos \alpha \right) \pi \end{aligned}$$

注意 パップス・ギュルダンの定理は, 高校数学の範囲外である. 入試では使用できないが, 便利な検算法である ¹. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6)

- 4 (1) $(n+3)a_{n+1} - na_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ の両辺に $(n+2)(n+1)$ を掛けると

$$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1} - (n+2)(n+1)na_n = 1$$

$$b_n = (n+2)(n+1)na_n \text{ より } b_{n+1} - b_n = 1$$

また, $b_1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 a_1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ より, $\{b_n\}$ は, 初項 6, 公差 1 の等差数列であるから

$$b_n = 6 + (n-1) \cdot 1 = \mathbf{n+5}$$

- (2) $p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n$ に (1) の結果を代入して

$$p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = n+5$$

これに $n = 0, -1, -2$ をそれぞれ代入すると

$$2p = 5, \quad -q = 4, \quad 2r = 3 \quad \text{よって} \quad \mathbf{p = \frac{5}{2}, q = -4, r = \frac{3}{2}}$$

- (3) $p(n+1)(n+2) + qn(n+2) + rn(n+1) = b_n$

上式の両辺を $n(n+1)(n+2)$ で割ると

$$\frac{p}{n} + \frac{q}{n+1} + \frac{r}{n+2} = a_n$$

(2) の結果から, $q = -p - r$ であるから

$$a_n = p \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - r \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

したがって, $p = \frac{5}{2}, r = \frac{3}{2}$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{5}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{3}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{5n}{2(n+1)} - \frac{3n}{4(n+2)} = \frac{\mathbf{n(7n+17)}}{4(\mathbf{n+1})(\mathbf{n+2})} \end{aligned}$$

■

5 (1) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, $A^2 - 7A + 10E = O$ より

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} &= A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (7A - 10E) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 7A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 10E \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 7 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \end{pmatrix}$ より

$$A \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 - 10 \cdot 3 = -20 \neq 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-20} \begin{pmatrix} 10 & 60 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $\mathbf{a} = 4, \mathbf{b} = 2, \mathbf{c} = 1, \mathbf{d} = 3$

(3) 行列 A の固有方程式は $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ これを解いて $\lambda = 2, 5$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A - 5E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2, 5 \text{ に対する固有ベクトルは, それぞれ } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって, 行列 A による不動直線は $\mathbf{y} = -\mathbf{x}, \mathbf{y} = \frac{1}{2}\mathbf{x}$ ■

- 6** (1) 楕円 E の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

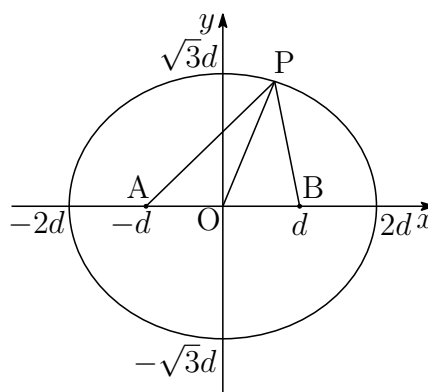
とおく. 2 点 $A(-d, 0)$, $B(d, 0)$ から楕円 E 上の点 P までの距離の和が $4d$ であるから

長軸の長さ $2a = 4d$

$a = 2d$, $d = \sqrt{a^2 - b^2}$ より

$$d = \sqrt{(2d)^2 - b^2} \quad \text{ゆえに} \quad b = \sqrt{3}d$$

短軸の長さ $2b = 2\sqrt{3}d$



- (2) 中線定理により $AP^2 + BP^2 = 2(OP^2 + d^2)$

$AP + BP = 4d$ であるから

$$\begin{aligned} AP \cdot BP &= \frac{1}{2} \{ (AP + BP)^2 - (AP^2 + BP^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (4d)^2 - 2(OP^2 + d^2) \} = 7d^2 - OP^2 \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} AP^3 + BP^3 &= (AP + BP)^3 - 3AP \cdot BP (AP + BP) \\ &= (4d)^3 - 3(7d^2 - OP^2) \cdot 4d \\ &= 12d \cdot OP^2 - 20d^3 \end{aligned}$$

$$\sqrt{3}d \leq OP \leq 2d \quad \text{より} \quad 16d^3 \leq AP^3 + BP^3 \leq 28d^3$$

よって 最大値 $28d^3$, 最小値 $16d^3$

