

平成 21 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・心理・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 応用理工・工学システム学類 2 3 必答, 1 4 5 6 から 2 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 情報科学・情報メディア創生学類 1 2 3 4 必答, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 II・C 選択の場合は 1 必答. 5 6 から 1 題選択.
数 III・B 選択の場合は 4 必答. 2 3 から 1 題選択.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.

1 以下の問いに答えよ.

- (1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ を示せ.
- (2) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ.
- (3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos \alpha)(x - 2\cos \beta)$ となる角度 α, β を求めよ. ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする.

- 2 xyz 空間内において, yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする. 点 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし, ℓ のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする.

- (1) D と平面 $z = t$ との交わりを D_t とする. ただし $0 \leq t \leq 4$ とする. 点 P が D_t 上を動くとき, 点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値, 最小値を求めよ.
- (2) 平面 $z = t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ.
- (3) E の体積 V を求めよ.

- 3 $f(x)$ を整式で表される関数とし, $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt$ とおく. 任意の実数 x について

$$x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

が成り立つとする.

- (1) $xf''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$ が成り立つことを示せ.
- (2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ.
- (3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ.

- 4 自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすものとする.

- (1) $\sqrt{2}$ は無理数であることを示せ.
- (2) a_{n+1} , b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ.
- (3) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n)$ が成り立つような定数 p , q を 2 組求めよ.
- (4) a_n , b_n を n を用いて表せ.

- 5 実数 a に対し, 行列 $A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ を考える. n を自然数とし, 座標平面上において, 行列 A^n により点 $(1, 0)$ が点 P_n に移り, 点 $(0, 1)$ が点 Q_n に移るものとする. 2 点 P_n , Q_n の間の距離を P_nQ_n で表す.

- (1) P_1Q_1 を求めよ.
- (2) A^n を a と n を用いて表せ.
- (3) n が固定され, a が実数全体を動くとき, P_nQ_n の最小値を求めよ.

6 点 $P(x, y)$ が双曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上を動くとき，点 $P(x, y)$ と点 $A(a, 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする．

(1) $f(a)$ を a で表せ．

(2) $f(a)$ を a の関数とみなすとき， ab 平面上に曲線 $b = f(a)$ の概形をかけ．

解答例

1 (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}
 \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
 &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\
 &= (2\cos^2 \theta - 1) \cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta \\
 &= 2\cos^3 \theta - \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\
 &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta
 \end{aligned}$$

(2) $g(\theta) = 2\cos 3\theta + 1$ とおくと, (1) の結果から

$$\begin{aligned}
 g(\theta) &= 2\cos 3\theta + 1 \\
 &= 2(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta) + 1 \\
 &= 8\cos^3 \theta - 6\cos \theta + 1 \\
 &= (2\cos \theta)^3 - 3(2\cos \theta) + 1
 \end{aligned}$$

$2\cos 3\theta + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$ のとき $g(\theta) = 0$

このとき $(2\cos \theta)^3 - 3(2\cos \theta) + 1 = 0$

すなわち, $2\cos \theta$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0 \cdots (*)$ の解である.

$\theta = 80^\circ$ は $\textcircled{1}$ の解であるから, $2\cos 80^\circ$ は, 3 次方程式 $(*)$ の解である.

(3) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ ($0^\circ < 3\theta < 540^\circ$) において, $\textcircled{1}$ の解は,

$$3\theta = 120^\circ, 240^\circ, 480^\circ \quad \text{すなわち} \quad \theta = 40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおくと, (2) の結論から

$$f(2\cos 40^\circ) = f(2\cos 80^\circ) = f(2\cos 160^\circ) = 0$$

したがって, 因数定理により, $f(x)$ は

$$x - 2\cos 40^\circ, x - 2\cos 80^\circ, x - 2\cos 160^\circ$$

を因数にもつ. このとき, x^3 の係数に注意して

$$f(x) = (x - 2\cos 40^\circ)(x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos 160^\circ)$$

$0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ であるから $\alpha = 40^\circ, \beta = 160^\circ$ ■

3 (1) $g(x) = \int_0^x e^t f(t) dt \cdots \textcircled{1}, \quad x(f(x) - 1) = 2 \int_0^x e^{-t} g(t) dt \cdots \textcircled{2}$

とおき, これらをそれぞれ x で微分すると

$$g'(x) = e^x f(x) \cdots \textcircled{1}', \quad x f'(x) + f(x) - 1 = 2e^{-x} g(x) \cdots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{2}' \text{ より } e^x \{x f'(x) + f(x) - 1\} = 2g(x)$$

これを x で微分し, $\textcircled{1}'$ を代入すると

$$\begin{aligned} e^x \{x f'(x) + f(x) - 1\} + e^x \{x f''(x) + 2f'(x)\} &= 2g'(x) \\ e^x \{x f''(x) + (x+2)f'(x) + f(x) - 1\} &= 2e^x f(x) \end{aligned}$$

両辺を $e^x > 0$ で割って整理すると, 次の恒等式が成立する.

$$x f''(x) + (x+2)f'(x) - f(x) = 1$$

(2) (1) の結論から

$$x f''(x) + 2f'(x) - 1 = f(x) - x f'(x) \quad (*)$$

整式 $f(x)$ の次数を n とし, $n \geq 2$ と仮定すると

$$x f''(x) + 2f'(x) - 1$$

は高々 $n-1$ 次式である.

x^n の係数を $a \neq 0$ とすると, $f(x) - x f'(x)$ の x^n の係数は

$$a - na = a(1-n) \neq 0$$

このとき, $(*)$ の両辺の次数について矛盾を生じる.

よって, $f(x)$ は定数または 1 次式である.

(3) $x=0$ を $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}'$ に代入すると

$$g(0) = 0, \quad f(0) - 1 = 2g(0) \quad \text{ゆえに} \quad f(0) = 1$$

(2) の結果から, $f(x) = ax + 1$ とおいて, (1) の結果に代入すると

$$(x+2)a - (ax+1) = 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

$$\text{したがって} \quad \mathbf{f(x) = x + 1}$$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると

$$g(x) = \int_0^x e^t (t+1) dt = \left[te^t \right]_0^x = \mathbf{x e^x}$$

補足 $f(x) = x + 1$ を $\textcircled{2}'$ に代入しても $g(x)$ は得られる. ■

- 4 (1) 「 $\sqrt{2}$ は無理数でない」すなわち「 $\sqrt{2}$ は有理数である」と仮定すると、自然数 k, l (k と l は互いに素) を用いて

$$\sqrt{2} = \frac{k}{l} \quad \text{ゆえに} \quad 2l^2 = k^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

① より、 k^2 は偶数であるから、 k も偶数である。

偶数 k は、 $k = 2m$ (m は自然数) と表されるから、① に代入して

$$2l^2 = 4m^2 \quad \text{すなわち} \quad l^2 = 2m^2$$

上の第2式から、 l^2 は偶数となり、 l も偶数となる。

k と l がともに偶数となり、 k と l が互いに素であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではなく、無理数である。

- (2) 自然数の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が

$$(5 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{A})$$

を満たすから

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (5 + \sqrt{2})^{n+1} = (5 + \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})^n \\ &= (5 + \sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= (5a_n + 2b_n) + (a_n + 5b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad (a_{n+1} - 5a_n - 2b_n) + (b_{n+1} - a_n - 5b_n)\sqrt{2} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

ここで、 $b_{n+1} - a_n - 5b_n \neq 0$ と仮定すると、② より

$$\sqrt{2} = -\frac{a_{n+1} - 5a_n - 2b_n}{b_{n+1} - a_n - 5b_n}$$

上式の右辺は有理数で、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに反する。

$$b_{n+1} - a_n - 5b_n = 0 \text{ となり、② に代入すると } a_{n+1} - 5a_n - 2b_n = 0$$

$$\text{よって} \quad a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 5b_n$$

(3) すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} + pb_{n+1} = q(a_n + pb_n) \quad (*)$$

が成り立つから，これに (1) の結果を代入すると

$$5a_n + 2b_n + p(a_n + 5b_n) = q(a_n + pb_n)$$

$$\text{整理すると} \quad (p+5-q)a_n + (5p+2-pq)b_n = 0$$

$$\text{これから} \quad p+5-q=0, \quad 5p+2-pq=0$$

$$\text{したがって} \quad (**) \quad \begin{cases} q = 5+p \\ pq = 5p+2 \end{cases}$$

(**) の第 1 式を第 2 式に代入すると

$$p(p+5) = 5p+2 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = 2$$

$$p = \pm\sqrt{2} \text{ を } (**) \text{ の第 1 式に代入すると} \quad q = 5 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad p = \pm\sqrt{2}, \quad q = 5 \pm \sqrt{2} \quad (\text{複号同順})$$

(4) (A) より $a_1 = 5, b_1 = 1$

(*) より，数列 $\{a_n + pb_n\}$ は，初項 $5+p$ ，公比 q の等比数列であるから

$$a_n + \sqrt{2}b_n = (5 + \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})^{n-1} = (5 + \sqrt{2})^n$$

$$a_n - \sqrt{2}b_n = (5 - \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})^{n-1} = (5 - \sqrt{2})^n$$

上の 2 式から

$$a_n = \frac{1}{2}\{(5 + \sqrt{2})^n + (5 - \sqrt{2})^n\}$$

$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}\{(5 + \sqrt{2})^n - (5 - \sqrt{2})^n\}$$



5 (1) $A = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$ より

$$AE = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$$

したがって $P_1(a-1, a-2), Q_1(a-2, 1-a)$

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = (-1, 3-2a)$$

よって $P_1Q_1 = |\overrightarrow{P_1Q_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (3-2a)^2}$
 $= \sqrt{4a^2 - 12a + 10}$

(2) ハミルトン・ケーリーの定理を A に適用すると $A^2 = (2a^2 - 6a + 5)E$

(i) n が偶数のとき $A^n = (A^2)^{\frac{n}{2}} = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} E$
 $= (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) n が奇数のとき $A^n = (A^2)^{\frac{n-1}{2}} A = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} A$
 $= (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & 1-a \end{pmatrix}$

(3) (1), (2) の結果から

(i) n が偶数のとき $\left(\overrightarrow{OP_n} \quad \overrightarrow{OQ_n} \right) = A^n E = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} E$

したがって $\overrightarrow{P_nQ_n} = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P_nQ_n = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2}$$

(ii) n が奇数のとき $\left(\overrightarrow{OP_n} \quad \overrightarrow{OQ_n} \right) = A^n E = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} A$

したがって $\overrightarrow{P_nQ_n} = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} \overrightarrow{P_1Q_1}$

$$P_nQ_n = (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{4a^2 - 12a + 10}$$

$$= (2a^2 - 6a + 5)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2}$$

したがって

$$P_nQ_n = \left\{ 2 \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \right\}^{\frac{n}{2}} \sqrt{2} \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2} = 2^{\frac{1-n}{2}}$$

よって, P_nQ_n の最小値は $2^{\frac{1-n}{2}}$ ■

- 6 (1) 双曲線 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 上の点 $P(x, y)$ について

$$y^2 = \frac{x^2}{2} - 1 \quad (x \leq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x)$$

このとき、点 $A(a, 0)$ と点 $P(x, y)$ の距離 AP は

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x - a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + \frac{x^2}{2} - 1 \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 2ax + a^2 - 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} - 1 \end{aligned}$$

$g(x) = AP^2$ とおく.

- (i) $\left|\frac{2a}{3}\right| \geq \sqrt{2}$, すなわち, $|a| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$f(a) = \sqrt{g\left(\frac{2a}{3}\right)} = \sqrt{\frac{a^2}{3} - 1}$$

- (ii) $0 \leq \frac{2a}{3} \leq \sqrt{2}$, すなわち, $0 \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

$$f(a) = \sqrt{g(\sqrt{2})} = \sqrt{a^2 - 2\sqrt{2}a + 2} = |a - \sqrt{2}|$$

- (iii) $-\sqrt{2} \leq \frac{2a}{3} \leq 0$, すなわち, $-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 0$ のとき

$$f(a) = \sqrt{g(-\sqrt{2})} = \sqrt{a^2 + 2\sqrt{2}a + 2} = |a + \sqrt{2}|$$

$$\text{よって} \quad f(a) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a^2}{3} - 1} & \left(|a| \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\ |a - \sqrt{2}| & \left(0 \leq a \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \\ |a + \sqrt{2}| & \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 0\right) \end{cases}$$

- (2) (1) の結果から, $b = f(a)$ のグラフは, 下の図の実線部分である. ■

