

平成 20 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・心理・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 応用理工・工学システム学類 2 3 必答, 1 4 5 6 から 2 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 情報科学・情報メディア創生学類
2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 II・C 選択の場合は 1 必答. 5 6 から 1 題選択.
数 III・B 選択の場合は 4 必答. 2 3 から 1 題選択.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.

1 p, q を正の実数とする. x の方程式

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

が 1 より大きい解をもつとき, 点 $(\log_{10} p, \log_{10} q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ.

2 xyz 空間内の点 $P(1, 0, 1)$ と, xy 平面上の円 $C: x^2 + (y - 2)^2 = 1$ に属する点 $Q(\cos \theta, 2 + \sin \theta, 0)$ を考える.

- (1) 直線 PQ と平面 $z = t$ の交点の座標を (α, β, t) とするとき, $\alpha^2 + \beta^2$ を t と θ で表せ.
- (2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z = 0, z = 1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ.
- (3) Q が C 上を一周するとき, (2) で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ.

3 e は自然対数の底とする. $t > e$ において関数 $f(t), g(t)$ を次のように定める.

$$f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t - x} dx, \quad g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t - x} dx$$

- (1) $f(t) - g(t)$ を t の 1 次式で表せ.
- (2) $1 \leq x \leq e$ かつ $t > e$ のとき $\frac{1}{t - x} \leq \frac{1}{t - e}$ が成り立つことを用いて, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$ を示せ.
- (3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{bt^2}{t - a} \right) = 0$ となる定数 a, b を求めよ.

4 二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の漸化式によって定める.

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \quad b_1 = 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \end{aligned}$$

- (1) すべての自然数 n について, $a_n^2 - 5b_n^2 = 4$ であることを示せ.
- (2) すべての自然数 n について, a_n, b_n は自然数かつ $a_n + b_n$ は偶数であることを証明せよ.

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ とする. $AP = PD$ が成り立つとき, a, x, y を求めよ. ただし $a > 0$ とする.
- (2) $(A + tE)^n = 4E$ が成り立つような実数 t と自然数 n の組をすべて求めよ. ただし $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

6 放物線 $C: y = x^2$ 上の異なる 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(s, s^2)$ ($s < t$) における接線の交点を $R(X, Y)$ とする.

(1) X, Y を t, s を用いて表せ.

(2) 点 P, Q が $\angle PRQ = \frac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき, 点 R は双曲線上を動くことを示し, かつ, その双曲線の方程式を求めよ.

解答例

1 p, q を正の実数とする x の方程式

$$\log_{10}(px) \cdot \log_{10}(qx) + 1 = 0$$

について, $t = \log_{10} x$, $a = \log_{10} p$, $b = \log_{10} q$ とおくと

$$(t+a)(t+b) + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 + (a+b)t + ab + 1 = 0 \quad (*)$$

x が 1 より大きい解をもつ, すなわち, t に関する 2 次方程式 $(*)$ が 0 より大きい解をもつときの点 (a, b) の存在する範囲を求めればよい.

2 次方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D = (a+b)^2 - 4(ab+1) = (a-b)^2 - 4$$

$(*)$ は実数解をもつから, $D \geq 0$ より

$$(a-b+2)(a-b-2) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq a-2, a+2 \leq b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$(*)$ の解 $t = \frac{-a-b \pm \sqrt{D}}{2}$ の少なくとも 1 つが正であればよいから

$$-a-b + \sqrt{D} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{D} > a+b \quad (**)$$

を満たせばよい.

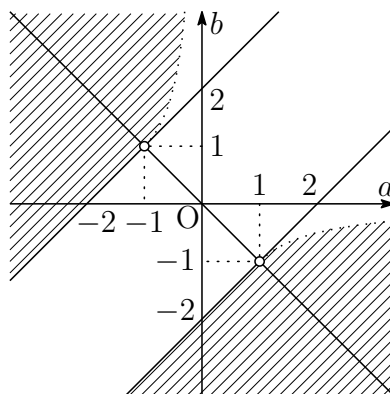
(i) $a+b < 0$ のとき, $(**)$ は成立する.

(ii) $a+b \geq 0$ のとき, $(**)$ の両辺を平方すると

$$(a-b)^2 - 4 > (a+b)^2 \quad \text{整理すると} \quad ab < -1$$

よって, $\textcircled{1}$ および, (i) または (ii) を満たす点 (a, b) が求める領域である.

ただし, 領域は斜線部分で, 点線および $\circ$ は除く.



別解 (*) を $f(t) = t^2 + (a+b)t + ab + 1$ とおく.

(i) $f(0) = ab + 1 < 0$ のとき, 正の解をもつ.

(ii) $f(0) = ab + 1 = 0$ のとき, $f(t) = 0$ は

$$t^2 + (a+b)t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t(t+a+b) = 0$$

解 $t = -a - b$ が正であるから

$$-a - b > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a + b < 0$$

(iii) $f(0) = ab + 1 > 0$ のとき

$$f(t) = \left(t + \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2 + 1$$

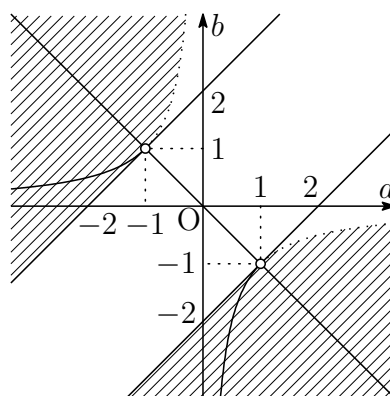
$y = f(t)$ の頂点 $\left(-\frac{a+b}{2}, -\frac{1}{4}(a-b)^2 + 1\right)$ の座標について

$$-\frac{a+b}{2} > 0 \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{4}(a-b)^2 + 1 \leq 0$$

すなわち $a + b < 0$ かつ $b < a - 2, a + 2 < b$

よって, (i)~(iii) を満たす点 (a, b) が求める領域である.

ただし, 領域は斜線部分で, 点線および $\circ$ は除く.



- 2** (1) $P(1, 0, 1)$, $Q(\cos \theta, 2 + \sin \theta, 0)$.

直線 PQ と平面 $z = t$ の交点 (α, β, t) を R とすると

$$\begin{aligned}\vec{OR} &= \vec{OQ} + t\vec{QP} \\ &= t\vec{OP} + (1-t)\vec{OQ}\end{aligned}$$

このとき $|\vec{OP}|^2 = 2$, $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = \cos \theta$

$$|\vec{OQ}|^2 = \cos^2 \theta + (2 + \sin \theta)^2 = 5 + 4 \sin \theta$$

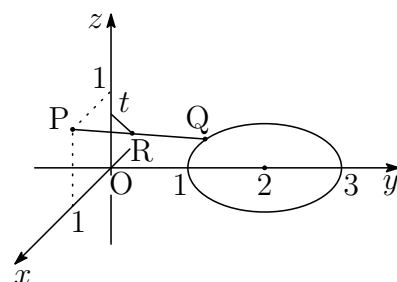
$$|\vec{OR}|^2 = \alpha^2 + \beta^2 + t^2$$

$$|\vec{OR}|^2 = t^2|\vec{OP}|^2 + 2t(1-t)\vec{OP} \cdot \vec{OQ} + (1-t)^2|\vec{OQ}|^2 \text{ であるから}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + t^2 = 2t^2 + 2t(1-t)\cos \theta + (1-t)^2(5 + 4 \sin \theta)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2(3 + 2 \sin \theta - \cos \theta)t^2$$

$$-2(5 + 4 \sin \theta - \cos \theta)t + 5 + 4 \sin \theta$$



- (2) 求める立体の体積を V とすると, (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 (\alpha^2 + \beta^2) dt \\ &= 2(3 + 2 \sin \theta - \cos \theta) \int_0^1 t^2 dt \\ &\quad - 2(5 + 4 \sin \theta - \cos \theta) \int_0^1 t dt + (5 + 4 \sin \theta) \int_0^1 dt \\ &= \frac{2}{3}(3 + 2 \sin \theta - \cos \theta) - (5 + 4 \sin \theta - \cos \theta) + (5 + 4 \sin \theta) \\ &= \frac{1}{3}(6 + 4 \sin \theta + \cos \theta)\end{aligned}$$

よって $V = \frac{\pi}{3}(6 + 4 \sin \theta + \cos \theta)$

- (3) $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$ とすると, (2) の結果から

$$V = \frac{\pi}{3}\{6 + \sqrt{17} \sin(\theta + \alpha)\}$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ であるから, $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$ より,

V は最大値 $\frac{\pi}{3}(6 + \sqrt{17})$, 最小値 $\frac{\pi}{3}(6 - \sqrt{17})$ をとる. ■

3 (1) $f(t) = \int_1^e \frac{t^2 \log x}{t-x} dx$, $g(t) = \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx$ より

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &= \int_1^e \frac{(t^2 - x^2) \log x}{t-x} dx \\ &= t \int_1^e \log x dx + \int_1^e x \log x dx \\ &= t \left[x(\log x - 1) \right]_1^e + \left[\frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^e \\ &= t + \frac{e^2 + 1}{4} \end{aligned}$$

(2) $1 \leq x \leq e$ かつ $t > e$ のとき $0 < \frac{1}{t-x} \leq \frac{1}{t-e}$, $x^2 \log x \geq 0$

したがって $0 < \frac{x^2 \log x}{t-x} \leq \frac{x^2 \log x}{t-e}$

$$0 < \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-x} dx \leq \int_1^e \frac{x^2 \log x}{t-e} dx$$

ゆえに $0 < g(t) \leq \frac{1}{t-e} \int_1^e x^2 \log x dx$

$K = \int_1^e x^2 \log x dx$ とおくと, K は定数であるから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t-e} \int_1^e x^2 \log x dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{K}{t-e} = 0$$

よって, はさみうちの原理により $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$

(3) (1) の結果から $f(t) = g(t) + t + \frac{e^2 + 1}{4}$

また $\frac{bt^2}{t-a} = \frac{b(t^2 - a^2) + a^2b}{t-a} = b(t+a) + \frac{a^2b}{t-a}$

ゆえに $f(t) - \frac{bt^2}{t-a} = g(t) + t + \frac{e^2 + 1}{4} - \left\{ b(t+a) + \frac{a^2b}{t-a} \right\}$

$$= (1-b)t + \frac{e^2 + 1}{4} - ab + g(t) - \frac{a^2b}{t-a}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(g(t) - \frac{a^2b}{t-a} \right) = 0$ であるから, $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{bt^2}{t-a} \right) = 0$ となるとき

$$1-b=0, \frac{e^2+1}{4} - ab=0 \quad \text{よって} \quad a = \frac{e^2+1}{4}, b=1$$

■

4 (1) $a_1 = 3, b_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n), b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \quad \cdots (*)$

$$\begin{aligned} \text{したがって } a_{n+1}^2 - 5b_{n+1}^2 &= \frac{1}{4}(3a_n + 5b_n)^2 - \frac{5}{4}(a_n + 3b_n)^2 \\ &= a_n^2 - 5b_n^2 \end{aligned}$$

$$a_1^2 - 5b_1^2 = 3^2 - 5 \cdot 1^2 = 4 \text{ および上の漸化式から } a_n^2 - 5b_n^2 = 4$$

(2) 漸化式 (*) より, すべての自然数 n について $a_n > 0, b_n > 0 \quad \cdots (**)$

$$c_n = a_n + b_n, d_n = a_n - b_n \text{ とすると } c_1 = 4, d_1 = 2$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n) + \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \\ &= 2a_n + 4b_n = 3(a_n + b_n) - (a_n - b_n) \\ &= 3c_n - d_n \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(3a_n + 5b_n) - \frac{1}{2}(a_n + 3b_n) \\ &= a_n + b_n \\ &= c_n \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

c_1, d_1 は偶数であり, ①, ② より, 数列 $\{c_n\}, \{d_n\}$ は偶数である.

$$a_n = \frac{c_n + d_n}{2}, \quad b_n = \frac{c_n - d_n}{2}$$

および (*) から, すべての自然数について a_n, b_n は自然数である.

また, c_n , すなわち, $a_n + b_n$ は偶数である. ■

- 5** (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有方程式は $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$
 ゆえに $(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$ したがって、固有値は $\lambda = -1, 3$

$$A + E = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

固有値 $-1, 3$ に対する固有ベクトルは、それぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \text{ が } AP = PD \text{ を満たすから}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{1}, \mathbf{x} = -\mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{3}$$

補足 A は対称行列であるから (${}^tA = A$), 2つの固有ベクトルは直交する¹.

(2) $A = PDP^{-1}$ より, $A + tE = P(D + tE)P^{-1}$ であるから

$$(A + tE)^n = P(D + tE)^n P^{-1} = 4E \quad \text{ゆえに} \quad (D + tE)^n = 4E$$

したがって

$$\begin{aligned} (D + tE)^n &= \begin{pmatrix} -1+t & 0 \\ 0 & 3+t \end{pmatrix}^n \\ &= \begin{pmatrix} (-1+t)^n & 0 \\ 0 & (3+t)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$-1+t \neq 3+t$ であるから $-1+t = -(3+t)$ ゆえに $t = -1$

これから $(-2)^n = 2^n = 4$ よって $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2003.pdf (p.14 を参照)

- 6** (1) $C: y = x^2$ より $y' = 2x$
 C 上の点 $P(t, t^2)$ における接線は

$$y - t^2 = 2t(x - t)$$

すなわち $y = 2tx - t^2 \quad \dots \textcircled{1}$

同様に C 上の点 $Q(s, s^2)$ における接線は

$$y = 2sx - s^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を連立すると

$$2tx - t^2 = 2sx - s^2$$

$$2(t - s)x = t^2 - s^2$$

$t - s \neq 0$ であるから $x = \frac{s+t}{2}$ ゆえに $y = 2s \cdot \frac{s+t}{2} - s^2 = st$

よって $X = \frac{s+t}{2}, Y = st$

- (2) 2点 $Q(s, s^2), P(t, t^2)$ における接線の偏角を α, β とすると ($s < t$)

$$\tan \alpha = 2s, \tan \beta = 2t, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$\angle PRQ = \frac{\pi}{4}$ より, $\beta - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$ であるから

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2t - 2s}{1 + 2s \cdot 2t} = -1$$

ゆえに $-(1 + 4st) = 2(t - s) > 0 \quad \dots (*)$

(*) の両辺を平方すると

$$(1 + 4st)^2 = 4(t - s)^2 = 4(s + t)^2 - 16st$$

(1) の結果から, $s + t = 2X, st = Y$ を代入すると

$$(1 + 4Y)^2 = 4X^2 - 16Y \quad \text{整理すると} \quad 16X^2 - 16Y^2 - 24Y = 1$$

したがって $X^2 - \left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}$

(*) より $-(1 + 4Y) > 0$ ゆえに $Y < -\frac{1}{4}$

よって, 点 R は次の双曲線上を動く.

$$x^2 - \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}, \quad y < -\frac{1}{4}$$

