

平成 19 年度 筑波大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分

- 社会学類 1 4 必答 (数 II・B), 及び他教科との選択.
- 国際総合学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 教育・心理・障害学類 数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 III 選択の場合は 2 3 必答. 数 C 選択の場合は 5 6 必答.
- 生物学類・生物資源学類・医学・医療学類
1 2 3 必答, 4 5 6 から 2 題選択.
- 地球・数学・物理・化学類 2 3 5 6 必答, 1 4 から 1 題選択.
- 応用理工・工学システム学類 2 3 必答, 1 4 5 6 から 2 題選択.
- 社会工学類 2 3 必答, 1 4 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.
- 情報科学・情報メディア創生学類
1 2 3 4 必答, 5 6 から 1 題選択.
- 知識情報・図書館学類
数 II・B 選択の場合は 1 4 必答.
数 II・C 選択の場合は 1 必答. 5 6 から 1 題選択.
数 III・B 選択の場合は 4 必答. 2 3 から 1 題選択.
数 III・C 選択の場合は 2 3 から 1 題選択, 5 6 から 1 題選択.

1 xy 平面上に 2 定点 $A(1, 0)$ と $O(0, 0)$ をとる. また, m を 1 より大きい実数とする.

- (1) $AP : OP = m : 1$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ.
- (2) 点 A を通る直線で, (1) で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ.
また, その共有点の座標も求めよ.

- 2** 関数 $f(x) = b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$, $b > 1$ とする。

- (1) $f(x) \geq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 $y = \sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。
- (3) $a = b \log b$ のとき、(2) で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。
このとき、 $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = 2\pi$ となることを示せ。

- 3** (1) $\int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx$ を求めよ。

- (2) 定数 a に対して、

$$f(x) = ax \sin x + x + \frac{\pi}{2}$$

とおく。このとき、不等式

$$\int_0^\pi \{f'(x)\}^2 \, dx \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。

- 4** (1) 一般項 a_n が $an^3 + bn^2 + cn$ で表される数列 $\{a_n\}$ において、

$$n^2 = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つように、定数 a , b , c を定めよ。

- (2) (1) の結果を用いて、 $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ。
- (3) $1, 2, \dots, n$ の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする。たとえば、 $S(3) = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3 = 11$ である。 $S(n)$ を n の 4 次式で表せ。

5 $a \neq 0$ とする. $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に対して, 2 次正方行列 P が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B$$

を満たしている.

(1) a と b を用いて P を表し, P が逆行列 P^{-1} をもつことを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}B$ とおく. xy 平面において, 点 (a, b) が放物線 $x = y^2 + 2$ 上を動くとき, 点 (s, t) の軌跡を求めよ. ただし, $|y| \leq 1$ とする.

6 xy 平面上で, 2 次曲線 $C: x^2 + ay^2 + by = 0$ が直線 $L: y = 2x - 1$ に点 P で接している. ただし, $a \neq -\frac{1}{4}$ とする.

(1) a と b の関係式を求めよ.

(2) C が楕円, 放物線, 双曲線となるそれぞれの場合に, b の値の範囲を求めよ.

(3) C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め, xy 平面上に図示せよ.

解答例

- 1** (1) $AP : OP = m : 1$ より ($m > 1$) $m^2 OP^2 = AP^2 \quad \dots \textcircled{1}$
 $A(1, 0)$, $O(0, 0)$, $P(x, y)$ より

$$AP^2 = (x-1)^2 + y^2, \quad OP^2 = x^2 + y^2$$

上の2式を①に代入すると $m^2(x^2 + y^2) = (x-1)^2 + y^2$

$$\text{整理すると} \quad (m^2 - 1)x^2 + (m^2 - 1)y^2 + 2x - 1 = 0$$

$m > 1$ より, $m^2 - 1 > 0$ であるから

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{m^2 - 1}x - \frac{1}{m^2 - 1} = 0 \quad (*)$$

$$\text{したがって} \quad \left(x + \frac{1}{m^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{m}{m^2 - 1}\right)^2$$

よって, 点Pの軌跡は, 中心 $\left(-\frac{1}{m^2 - 1}, 0\right)$, 半径 $\frac{m}{m^2 - 1}$ の円.

別解 線分AOを $m : 1$ に内分, 外分する点は ($m \neq 1$), それぞれ

$$\left(\frac{1}{m+1}, 0\right), \quad \left(-\frac{1}{m-1}, 0\right)$$

Pの軌跡はこの2点を直径の両端とする円であるから (アポロニウスの円)

$$\left(x - \frac{1}{m+1}\right)\left(x + \frac{1}{m-1}\right) + y^2 = 0$$

これを整理すると, (*) を得る.

- (2) $a = \frac{1}{m^2 - 1}$ とおくと ($a > 0$), (*) は $x^2 + y^2 + 2ax - a = 0 \quad \dots (**)$

点A(1, 0)を通る直線 $x = 1$ と (**) を連立すると $y^2 + a + 1 = 0$

これを満たす解はないので, 求める接線を $y = k(x-1) \dots \textcircled{2}$ とすると

$$x^2 + \{k(x-1)\}^2 + 2ax - a = 0$$

$$\text{整理すると} \quad (k^2 + 1)x^2 - 2(k^2 - a)x + k^2 - a = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

③は, 重解をもつから, 係数について

$$D/4 = (k^2 - a)^2 - (k^2 + 1)(k^2 - a) = -(k^2 - a)(a + 1) = 0$$

$a + 1 \neq 0$ であるから, $k = \pm\sqrt{a}$. ③に代入して $x = 0$

これと②により, 接点 $(0, -k)$. $k = \pm\frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}}$ であるから

$$\text{接線 } y = \pm\frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}}(x - 1), \text{ 接点 } \left(0, \mp\frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}}\right) \quad (\text{複号同順}) \quad \blacksquare$$

2 (1) $f(x) = b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}$ について, $f(x) \geq 0$ のとき

$$b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (e^{ax})^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right)e^{ax} + 1 \leq 0$$

$$\text{したがって} \quad (e^{ax} - b) \left(e^{ax} - \frac{1}{b}\right) \leq 0 \quad b > 1 \text{ より} \quad \frac{1}{b} \leq e^{ax} \leq b$$

$$\log \frac{1}{b} \leq ax \leq \log b \quad a > 0 \text{ より} \quad -\frac{1}{a} \log b \leq x \leq \frac{1}{a} \log b$$

(2) $k = \frac{1}{a} \log b$ とおくと, $e^{ak} = b$, $e^{-ak} = \frac{1}{b}$ に注意して

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-k}^k \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx = \pi \int_{-k}^k \left(b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}\right) dx \\ &= 2\pi \int_0^k \left(b + \frac{1}{b} - e^{ax} - e^{-ax}\right) dx \\ &= 2\pi \left[\left(b + \frac{1}{b}\right)x - \frac{1}{a}e^{ax} + \frac{1}{a}e^{-ax} \right]_0^k \\ &= 2\pi \left\{ \left(b + \frac{1}{b}\right)k - \frac{e^{ak}}{a} + \frac{e^{-ak}}{a} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{a} \left\{ \left(b + \frac{1}{b}\right) \log b - b + \frac{1}{b} \right\} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果に $a = b \log b$ を代入することにより

$$\begin{aligned} V(b) &= \frac{2\pi}{b \log b} \left\{ \left(b + \frac{1}{b}\right) \log b - b + \frac{1}{b} \right\} \\ &= 2\pi \left(1 + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\log b} + \frac{1}{b^2 \log b} \right) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \left(1 + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{\log b} + \frac{1}{b^2 \log b} \right) = 2\pi$$

■

$$\begin{aligned}
\boxed{3} \quad (1) \quad \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx &= \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\
&= \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \, dx + \int_0^\pi \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' \, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x \right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$(2) \quad f(x) = ax \sin x + x + \frac{\pi}{2} \text{ より } f'(x) = a(\sin x + x \cos x) + 1$$

$$g(x) = \sin x + x \cos x, \quad M = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi g(x) \, dx &= \int_0^\pi (\sin x + x \cos x) \, dx = \left[x \sin x \right]_0^\pi = 0, \\
\int_0^\pi \{g(x)\}^2 \, dx &= \int_0^\pi (\sin x + x \cos x)^2 \, dx \\
&= \int_0^\pi (\sin^2 x + 2x \sin x \cos x + x^2 \cos^2 x) \, dx \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} + x \sin 2x \right) \, dx + \int_0^\pi x^2 \cos^2 x \, dx \\
&= \left[\frac{x}{2} (1 - \cos 2x) \right]_0^\pi + M = M
\end{aligned}$$

$f'(x) = ag(x) + 1$ であるから, 上の結果により

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \{f'(x)\}^2 \, dx &= \int_0^\pi \{ag(x) + 1\}^2 \, dx \\
&= a^2 \int_0^\pi \{g(x)\}^2 \, dx + 2a \int_0^\pi g(x) \, dx + \int_0^\pi 1 \, dx \\
&= a^2 M + \pi
\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \left(\frac{a}{2} + 1\right) \text{ より, } \int_0^\pi \{f'(x)\}^2 \, dx \geq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ を満たすとき}$$

$$a^2 M + \pi \geq \pi \left(\frac{a}{2} + 1\right) \quad \text{整理すると} \quad a^2 M - \frac{a}{2} \pi \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad a^2 \left(\frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{a}{2} \pi \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \{(2\pi^2 + 3)a - 6\} \geq 0$$

$$\text{よって} \quad a \leq 0, \quad \frac{6}{2\pi^2 + 3} \leq a \quad \blacksquare$$

4 (1) $a_n = an^3 + bn^2 + cn$ について

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + cn - (an^3 + bn^2 + cn) \\ &= a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c \\ &= 3an^2 + (3a + 2b)n + (a + b + c) \end{aligned}$$

すべての自然数 n について, $n^2 = a_{n+1} - a_n$ が成立するから

$$3a = 1, \quad 3a + 2b = 0, \quad a + b + c = 0$$

$$\text{これを解いて } a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{6}$$

(2) (1) の結果から

$$a_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad a_1 = 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

$$(3) (1+2+\cdots+n)^2 = \sum_{1 \leq j, k \leq n} jk = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} jk$$

$$1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad S(n) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} jk \text{ および (2) の結果により}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2S(n)$$

$$\begin{aligned} \text{したがって } S(n) &= \frac{1}{8}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1) - 2(2n+1)\} \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2 - n - 2) \\ &= \frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2) \\ &= \frac{1}{24}(3n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 2n) \end{aligned}$$

■

5 (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ に対して ($a \neq 0$), 2 次正方行列 P が

$$PA = A + B, \quad PB = A - B \quad (*)$$

を満たしているから

$$P \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 1+b & 1-b \end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} = -a \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a & -a \\ 1+b & 1-b \end{vmatrix} = 2a \neq 0 \quad \text{であるから, } P \text{ は正則で,}$$

逆行列 P^{-1} をもつ. $(**)$ より

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} a & -a \\ 1+b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a & -a \\ 1+b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -b-1 & a \\ \frac{-b^2-2b+1}{a} & b+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) (*) \text{ より } A = P^{-1}A + P^{-1}B, \quad B = P^{-1}A - P^{-1}B$$

$$\text{上の 2 式から } A - B = 2P^{-1}B \quad \text{ゆえに } B = A - 2P^{-1}B$$

$$\text{したがって } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

点 (a, b) は放物線 $x = y^2 + 2$ ($-1 \leq y \leq 1$) 上にあるから

$$-2s = (1 - 2t)^2 + 2, \quad -1 \leq 1 - 2t \leq 1$$

$$\text{すなわち } s = -2t^2 + 2t - \frac{3}{2} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\text{よって 放物線 } x = -2y^2 + 2y - \frac{3}{2} \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \blacksquare$$

6 (1) $C: x^2 + ay^2 + by = 0, \quad L: y = 2x - 1$

C と L の方程式から y を消去すると

$$x^2 + a(2x - 1)^2 + b(2x - 1) = 0$$

整理すると $(4a + 1)x^2 - 2(2a - b)x + a - b = 0 \quad \dots (*)$

$a \neq -\frac{1}{4}$ で、 C と L は接するから、上の 2 次方程式は重解をもつ。

その判別式を D とすると

$$D/4 = (2a - b)^2 - (4a + 1)(a - b) = b^2 + b - a = 0$$

このとき、条件から、 $(a, b) \neq \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

また、 C は 2 次曲線であるから、 $(a, b) \neq (0, 0)$

よって $a = b^2 + b, \quad \left(b \neq -\frac{1}{2}, 0\right)$

(2) (1) の結果から、2 次曲線 C の方程式は

$$x^2 + b(b + 1)y^2 + by = 0 \quad (**)$$

(i) $b(b + 1) = 0$ のとき ($b \neq 0$), $b = -1$ を $(**)$ に代入すると

$$y = x^2 \quad \text{したがって} \quad \text{放物線}$$

(ii) $b(b + 1) \neq 0$ のとき、 $(**)$ から

$$x^2 + b(b + 1) \left\{ y + \frac{1}{2(b + 1)} \right\}^2 = \frac{b}{4(b + 1)}$$

このとき、 $b(b + 1)$ と $\frac{b}{4(b + 1)}$ の符号が一致するから

$$\begin{array}{ll} b(b + 1) > 0 & \text{すなわち } b < -1, 0 < b \text{ のとき} & \text{楕円} \\ b(b + 1) < 0 & \text{すなわち } -1 < b < 0 \text{ (} b \neq -\frac{1}{2} \text{) のとき} & \text{双曲線} \end{array}$$

よって C が楕円になるとき $b < -1, 0 < b$

C が放物線になるとき $b = -1$

C が双曲線になるとき $-1 < b < 0 \quad \left(b \neq -\frac{1}{2}\right)$

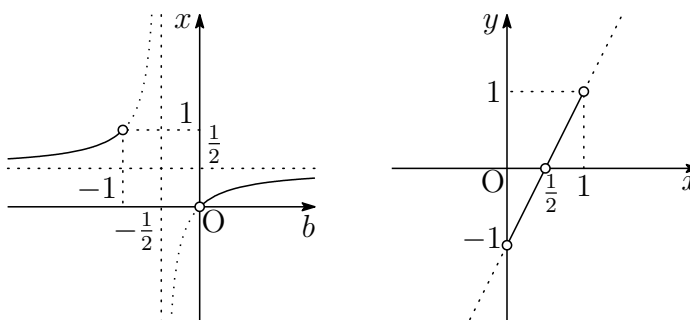
(3) C が楕円の時、その接点の x 座標は、(*) および (1) の結果から

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-2(2a-b)}{2(4a+1)} = \frac{2a-b}{4a+1} = \frac{2(b^2+b)-b}{4(b^2+b)+1} \\ &= \frac{b(2b+1)}{(2b+1)^2} = \frac{b}{2b+1} = -\frac{1}{2(2b+1)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

C が楕円の時、 $b < -1$, $0 < b$ であるから、接点の x 座標は、左下の図のグラフで示す

$$0 < x < 1 \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$$

また、接点 P は L 上の点であるから、その y 座標は $y = 2x - 1$ によって、接点 $P(x, y)$ の存在範囲は、右下の図の実線部分である。



補足 2次曲線 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ は、 $D = ac - b^2$ とすると

楕円 $\implies D > 0$, 放物線 $\implies D = 0$, 双曲線 $\implies D < 0$

であるが、逆は成立しない¹. ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2010.pdf> (p.13 を参照)