

平成26年度 東京工業大学 2次試験前期日程 (数学問題)180分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成26年2月25日

問題 1 2 3 4 5

1 3以上の奇数 n に対して, a_n と b_n を次のように定める.

$$a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1), \quad b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

(1) a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ.

(2) $a_n - b_n$ は4の倍数であることを示せ.

2 $a > 1$ とし, 次の不等式を考える.

$$(*) \quad \frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a = 2$ のとき, すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ.

(2) すべての $t > 0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ.

3 1個のさいころを投げて, 出た目が1か2であれば行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を, 出

た目が3か4であれば行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を, 出た目が5か6であれば行列

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 選ぶ. そして, 選んだ行列の表す1次変換によって xy 平面上

の点 R を移すという操作を行う. 点 R は最初は点 $(0, 1)$ にあるものとし, さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点 $(0, 1)$ にある確率を p_n , 点 $(0, -1)$ にある確率を q_n とする.

(1) p_1 , p_2 と q_1 , q_2 を求めよ.

(2) $p_n + q_n$ と $p_{n-1} + q_{n-1}$ の関係式を求めよ. また, $p_n - q_n$ と $p_{n-1} - q_{n-1}$ の関係式を求めよ.

(3) p_n を n を用いて表せ.

- 4 点 $P(t, s)$ が $s = \sqrt{2}t^2 - 2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに、点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに、曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

- (1) 点 $Q(x, y)$ の座標を、 t を用いて表せ。
- (2) 直線 $y = a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ。
- (3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

- 5 xy 平面上の曲線 $C : y = x^3 + x^2 + 1$ を考え、 C 上の点 $(1, 3)$ を P_0 とする。 $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して、点 $P_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $P_k(x_k, y_k)$ とする。このとき、 P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

- (1) S_1 を求めよ。
- (2) x_k を k を用いて表せ。
- (3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。

解答例

- 1 (1) n は、3 以上の奇数であるから

$$a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1),$$

$$b_n = \frac{n^2-1}{8} = \frac{(n-1)(n+1)}{2 \cdot 4}$$

連続する3整数 $k-1, k, k+1$ には、少なくとも2と3の倍数が存在する。
 また、 $n-1, n+1$ は連続する偶数で、少なくとも一方は4で割り切れる。
 よって、 a_n と b_n はどちらも整数である。

- (2) a_n を求めると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1) = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1)\{(k+2)-(k-2)\} \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=1}^{n-1} \{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{24} (n-2)(n-1)n(n+1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \frac{1}{24} (n-2)(n-1)n(n+1) - \frac{1}{8} (n-1)(n+1) \\ &= \frac{1}{24} (n-1)(n+1)\{n(n-2)-3\} \\ &= \frac{1}{24} (n-3)(n-1)(n+1)^2 \end{aligned}$$

n は3以上の奇数の整数であるから、 $n = 2m+1$ とおくと (m は自然数)

$$a_n - b_n = \frac{1}{24} (2m-2) \cdot 2m(2m+2)^2 = \frac{2}{3} (m-1)m(m+1)^2$$

連続する3整数 $m-1, m, m+1$ には、少なくとも2と3の倍数が存在する。
 よって、 $a_n - b_n$ は4の倍数である。

別解 $a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)k(k+1)$, $b_n = \frac{n^2-1}{8}$ より (n は 3 以上の奇数)

$$\begin{aligned} a_3 - b_3 &= 1 - 1 = 0, \\ a_{n+2} - a_n &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) + \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ b_{n+2} - b_n &= \frac{(n+2)^2-1}{8} - \frac{n^2-1}{8} \\ &= \frac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (a_{n+2} - a_n) - (b_{n+2} - b_n) &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}(n+1) \\ (a_{n+2} - b_{n+2}) - (a_n - b_n) &= \frac{1}{6}(n+1)(n-1)(2n+3) \end{aligned}$$

n は 3 以上の奇数であるから, $n = 2m+1$ とおくと (m は自然数)

$$\begin{aligned} (a_{2m+3} - b_{2m+3}) - (a_{2m+1} - b_{2m+1}) &= \frac{2}{3}m(m+1)(4m+5) \\ &= \frac{2}{3}m(m+1)\{(m+2) + 3(m+1)\} \\ &= \frac{2}{3}m(m+1)(m+2) + 2m(m+1)^2 \end{aligned}$$

連続する 3 つの自然数には, 少なくとも 2 と 3 の倍数が存在するから, $m(m+1)(m+2)$ は 6 の倍数. 連続する 2 つの自然数には, 少なくとも 2 の倍数が存在するから, $m(m+1)$ は 2 の倍数. 上式から

$$(a_{2m+3} - b_{2m+3}) - (a_{2m+1} - b_{2m+1})$$

は 4 の倍数で, $a_3 - b_3 = 0$ であるから, すべての自然数 m について

$$a_{2m+1} - b_{2m+1}$$

は 4 の倍数である. ■

2 (1) $f(t) = e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} - t$ とおくと $f(0) = 0$

$$f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} - 1 = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2}(e^{\frac{t}{2}} - 1)^2 \geq 0$$

したがって、 $t > 0$ のとき $f(t) \geq 0$. このとき

$$e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} - t \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{2}}$$

(2) $a \geq 2$ のとき、 $t > 0$ に対して、 $e^{\frac{t}{2}} \geq e^{\frac{t}{a}}$ であるから、(1) の結果により

$$\frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{2}} \geq e^{\frac{t}{a}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{e^t - 1}{t} \geq e^{\frac{t}{a}}$$

$1 < a < 2$ とし、 $g(t) = e^{(1-\frac{1}{a})t} - e^{-\frac{t}{a}} - t$ とおくと $g(0) = 0$

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(1 - \frac{1}{a}\right) e^{(1-\frac{1}{a})t} + \frac{1}{a} e^{-\frac{t}{a}} - 1, \\ g''(t) &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 e^{(1-\frac{1}{a})t} - \frac{1}{a^2} e^{-\frac{t}{a}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 e^{-\frac{t}{a}} \left\{ e^t - \frac{1}{(a-1)^2} \right\} \end{aligned}$$

ゆえに $g'(0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g'(t) = \infty$

$t_0 = -2\log(a-1)$ とおくと $t_0 > 0$, $g''(t_0) = 0$

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$g''(t)$		$-$	0	$+$
$g'(t)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

上の増減表により、 $g'(t_0) < 0$ であるから

$$g'(t_1) = 0, \quad t_0 < t_1$$

をみたす t_1 が唯一存在する. したがって

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

このとき、 $g(t_1) < 0$ となり、 $t = t_1$ に対して、不等式(*)は成立しない.

よって、求める a の値の範囲は $a \geq 2$ ■

3 (1) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned} A\vec{e} &= -\vec{f}, & B\vec{e} &= \vec{f}, & C\vec{e} &= -\vec{e}, \\ A\vec{f} &= \vec{e}, & B\vec{f} &= -\vec{e}, & C\vec{f} &= \vec{f} \end{aligned}$$

p_1 は 1 回目に C を選ぶ確率であるから $p_1 = \frac{1}{3}$

1 回目に A, B, C のいずれを選んでも点 $(0, -1)$ にないから $q_1 = 0$
 操作を 2 回続けて行ったとき点 R が点 $(0, 1)$ に移るのは、行列の積が

$$AA, \quad AB, \quad CC$$

となる場合であるから

$$p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

操作を 2 回続けて行ったとき点 R が点 $(0, -1)$ に移るのは、行列の積が

$$AA, \quad BB$$

となる場合であるから $q_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(2) R を移す操作を n 回続けて行って、点 R が点 $(1, 0)$ にある確率を r_n 、点 $(-1, 0)$ にある確率を s_n とすると、次の確率漸化式が成立する。

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}(p_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1}), & r_n &= \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1} + s_{n-1}), \\ q_n &= \frac{1}{3}(q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1}), & s_n &= \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1}) \end{aligned}$$

$p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1} + s_{n-1} = 1$ であるから

$$p_n + q_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(p_{n-1} + q_{n-1}), \quad p_n - q_n = \frac{1}{3}(p_{n-1} - q_{n-1})$$

(3) (2) の結果から $p_n + q_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(p_{n-1} + q_{n-1} - \frac{1}{2} \right)$

ゆえに $p_n + q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \right)^n, \quad p_n - q_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$

よって $p_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ ■

- 4 (1) 点 $Q(x, y)$ は点 $P(t, \sqrt{2}t^2 - 2t)$ を原点を中心に 45° 回転した点であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2 - 2t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2 - 2t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}t^2 + 3t \\ \sqrt{2}t^2 - t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって $Q\left(-t^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}t, t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

- (2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} y &= t^2 - \frac{t}{\sqrt{2}} \\ &= \left(t - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$y \geq -\frac{1}{8}$ であるから、直線 $y = a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つとき

$$a = -\frac{1}{8}$$

- (3) D は、上の図の斜線部分である.
- | | |
|-----|------------------------------------|
| t | $0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| x | $0 \rightarrow 1$ |
- $\frac{dx}{dt} = -2t + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^1 x|y|dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x|y|\frac{dx}{dt} \cdot dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-t^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right) \left(-t^2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) \left(-2t + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(-2t^5 + \frac{11}{\sqrt{2}}t^4 - 9t^3 + \frac{9}{2\sqrt{2}}t^2\right) dt \\ &= \left[-\frac{t^6}{3} + \frac{11}{5\sqrt{2}}t^5 - \frac{9}{4}t^4 + \frac{3}{2\sqrt{2}}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{11}{240} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{11}{120}\pi$

■

- 5** (1) $y = x^3 + x^2 + 1$ を微分すると $y' = 3x^2 + 2x$
 C 上の点 $(t, t^3 + t^2 + 1)$ における接線を l とすると, l の方程式は

$$y - (t^3 + t^2 + 1) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 + 1$

C と l の方程式から

$$x^3 + x^2 + 1 - \{(3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 + 1\} = (x - t)^2(x + 2t + 1)$$

$x_{k-1} = t$ のとき, $x_k + 2t + 1 = 0$ ゆえに $x_k = -2x_{k-1} - 1$

$x_0 = 1$ であるから

$$x_k + \frac{1}{3} = -2 \left(x_{k-1} + \frac{1}{3} \right) \quad \text{よって} \quad x_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{k+2} \quad \dots (*)$$

したがって $x_k - x_{k-1} = \frac{-1 + (-2)^{k+2}}{3} - \frac{-1 + (-2)^{k+1}}{3} = -(-2)^{k+1}$

ゆえに $S_k = \frac{1}{12} |x_k - x_{k-1}|^4 = \frac{16^{k+1}}{12} \quad \dots (**)$

よって $S_1 = \frac{16^2}{12} = \frac{64}{3}$

(2) $(*)$ より $x_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(-2)^{k+2}$

(3) $(**)$ より $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{12}{16^{k+1}} = \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{20}$

補足 公式¹

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

に $m = 2, n = 1, \alpha = x_{k-1}, \beta = x_k$ を代入すると

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_{k-1})^2 (x_k - x) dx = \frac{1}{12} (x_k - x_{k-1})^4$$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010-kouki.pdf> の **1** を参照.