

平成 25 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)180 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 25 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5

1 (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の 2 つの解 α, β に対し, $\alpha^n + \beta^n - 3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ.

(2) 6 個のさいころを同時に投げるとき, ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ.

2 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $\Delta(A) = ad - bc$, $t(A) = a + d$ と定める.

(1) 2 次の正方行列 A, B に対して, $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ.

(2) A の成分がすべて実数で, $A^5 = E$ が成り立つとき, $x = \Delta(A)$ と $y = t(A)$ の値を求めよ. ただし, E は 2 次の単位行列とする.

3 k を定数とすると, 方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ.

4 正の整数 n に対し, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

5 a, b を正の実数とし, 円 $C_1: (x - a)^2 + y^2 = a^2$ と楕円 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える.

(1) C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ.

(2) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ とし, C_1 が C_2 に内接しているとする. このとき, 第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 (p, q) を求めよ.

(3) (2) の条件のもとで, $x \geq p$ の範囲において, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

- 1** (1) α, β は 2 次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ について, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 5 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -1$$

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n + \beta^n) \text{ より}$$

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} = 3(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) - 5(\alpha^n + \beta^n) \quad \cdots (*)$$

$\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2$ は整数であるから, (*) より, すべての自然数 n について, $\alpha^n + \beta^n$ は整数である. したがって

$$\alpha^{n+2} + \beta^{n+2} \equiv 3(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \pmod{5}$$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha^n + \beta^n \equiv 3^{n-1}(\alpha + \beta) = 3^n \pmod{5}$$

$$\text{よって} \quad \alpha^n + \beta^n - 3^n \equiv 0 \pmod{5}$$

したがって, $\alpha^n + \beta^n - 3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の倍数である.

補足 α, β は 2 次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の解であるから

$$\alpha^{n+2} - 3\alpha^{n+1} + 5\alpha^n = 0, \quad \beta^{n+2} - 3\beta^{n+1} + 5\beta^n = 0$$

上の 2 式の辺々を加えることにより, (*) を得る.

- (2) k を自然数とする. k 個の数字 $A_1, A_2, \dots, A_k$ から重複を許して 1 列に 6 個並べるとき, k 種類の数字がそろう場合の総数を Q_k とすると ¹

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = 2^6 - {}_2C_1 \cdot Q_1$$

$$Q_3 = 3^6 - {}_3C_1 \cdot Q_1 - {}_3C_2 \cdot Q_2$$

$$Q_4 = 4^6 - {}_4C_1 \cdot Q_1 - {}_4C_2 \cdot Q_2 - {}_4C_3 \cdot Q_3$$

$$\text{上の諸式から} \quad Q_2 = 62, \quad Q_3 = 540, \quad Q_4 = 1560$$

$$\text{求める確率は} \quad \frac{{}_6C_4 \cdot Q_4}{6^6} = \frac{15 \times 1560}{6^6} = \frac{325}{648}$$



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf (p.12 を参照)

2 (1) $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \Delta(AB) &= (ap + br)(cq + ds) - (aq + bs)(cp + dr) \\ &= adps + bcqr - (adqr + bcps) \\ &= (ad - bc)(ps - qr) \\ &= \Delta(A)\Delta(B) \end{aligned}$$

(2) $A^5 = E$ より $\Delta(A^5) = \Delta(E)$

(1) の結果から $\{\Delta(A)\}^5 = 1$ ゆえに $\Delta(A) = 1$

$x = \Delta(A) = 1 \neq 0$, $y = t(A)$ であるからハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 - yA + E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = yA - E, \quad A^{-1} = -A + yE$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad A^4 &= (A^2)^2 = (yA - E)^2 \\ &= y^2 A^2 - 2yA + E \\ &= y^2(yA - E) - 2yA + E \\ &= (y^3 - 2y)A + (1 - y^2)E \end{aligned}$$

$A^5 = E$ より, $A^4 = A^{-1}$ であるから

$$(y^3 - 2y)A + (1 - y^2)E = -A + yE$$

$$\text{したがって} \quad (y^2 + y - 1)\{(y - 1)A - E\} = O$$

$$(i) \quad y^2 + y - 1 = 0 \text{ のとき} \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(ii) \quad (y - 1)A - E = O \text{ のとき, } y \neq 1 \text{ に注意して} \quad A = \frac{1}{y - 1}E$$

$$A^5 = E \text{ であるから} \quad \frac{1}{(y - 1)^5}E = E$$

$$\text{ゆえに} \quad (y - 1)^5 = 1 \quad \text{これを解いて} \quad y = 2$$

$$\text{よって} \quad x = 1, \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad 2$$

■

3 $f(x) = e^x - x^e$ とすると

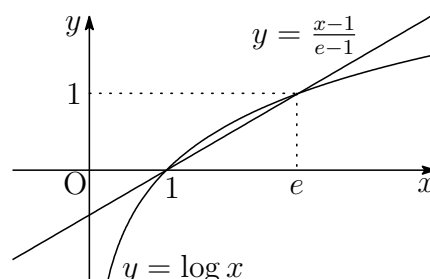
$$f'(x) = e^x - ex^{e-1} = e(e^{x-1} - x^{e-1}) = ex^{e-1} \left(\frac{e^{x-1}}{x^{e-1}} - 1 \right)$$

$$g(x) = \frac{e^{x-1}}{x^{e-1}} \text{ とおくと } (x > 0)$$

$$g(1) = g(e) = 1,$$

$$\log g(x) = x - 1 - (e - 1) \log x$$

$$= (e - 1) \left(\frac{x - 1}{e - 1} - \log x \right)$$



$y = \frac{x-1}{e-1}$ および $y = \log x$ のグラフから

$0 < x < 1, e < x$ のとき $\log g(x) > 0$ すなわち $g(x) > 1$

$1 < x < e$ のとき $\log g(x) < 0$ すなわち $0 < g(x) < 1$

$f'(x) = ex^{e-1}\{g(x) - 1\}$ より, $f(x)$ の増減表は

x	(0)	...	1	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	(1)	↗	$e - 1$	↘	0	↗

$x > 3$ のとき, $\frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{e - 1} > \log e^{\frac{x}{3}}$ より $e^{\frac{x}{3}} > \frac{e - 1}{3}x + 1 > \frac{e - 1}{3}x$

ゆえに $e^x > \left(\frac{e - 1}{3}\right)^3 x^3$ すなわち $0 < \frac{x^e}{e^x} < \left(\frac{3}{e - 1}\right)^3 x^{e-3}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{e - 1}\right)^3 x^{e-3} = 0$ であるから, はさみうちの原理により $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^e}{e^x} = 0$

したがって $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(1 - \frac{x^e}{e^x}\right) = \infty$

求める正の解の個数は, 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の個数であるから

$k < 0$ のとき 0 個

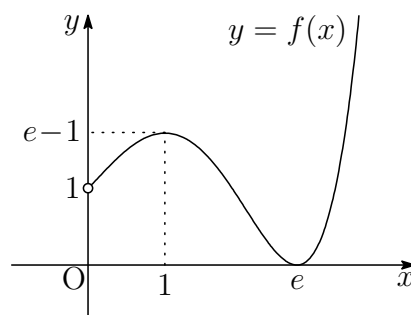
$k = 0$ のとき 1 個

$0 < k \leq 1$ のとき 2 個

$1 < k < e - 1$ のとき 3 個

$k = e - 1$ のとき 2 個

$e - 1 < k$ のとき 1 個



4 $\sin 4nx \geq \sin x \cdots (*)$ より

$$\sin 4nx - \sin x = 2 \cos \frac{(4n+1)x}{2} \sin \frac{(4n-1)x}{2} \geq 0$$

$f(x) = \cos \frac{(4n+1)x}{2}$, $g(x) = \sin \frac{(4n-1)x}{2}$ とおくと, 整数 k を用いて

$$\frac{2k-3}{4n+1}\pi \leq x \leq \frac{2k-1}{4n+1}\pi \text{ のとき } f(x) = (-1)^{k-1}|f(x)|$$

$$\frac{2k-2}{4n-1}\pi \leq x \leq \frac{2k}{4n-1}\pi \text{ のとき } g(x) = (-1)^{k-1}|g(x)|$$

$$1 \leq k \leq n \text{ のとき } \frac{2k-1}{4n+1} - \frac{2k-2}{4n-1} = \frac{4(n-k)+3}{(4n+1)(4n-1)} > 0$$

$$\text{このとき } \frac{2k-3}{4n+1} < \frac{2k-2}{4n-1} < \frac{2k-1}{4n+1} < \frac{2k}{4n-1}$$

$(*)$ のとき, $f(x)g(x) \geq 0$ より, $\frac{2k-2}{4n-1}\pi \leq x \leq \frac{2k-1}{4n+1}\pi$ であるから, 範囲 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\pi} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{4n+1} - \frac{2k-2}{4n-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4n-4k+3}{(4n+1)(4n-1)} = \sum_{k=1}^n \frac{4(n+1-k)-1}{(4n+1)(4n-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4k-1}{(4n+1)(4n-1)} \\ &= \frac{2n(n+1)-n}{(4n+1)(4n-1)} = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)} \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{16 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{8} \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{8} \quad \blacksquare$$

5 (1) $C_1: (x-a)^2 + y^2 = a^2$, $C_2: x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- (i) C_1 と C_2 の接点が $(1, 0)$ でないとき,
すなわち, $0 < a < \frac{1}{2}$ のとき, C_1 と
 C_2 から y を消去すると

$$(1-b^2)x^2 - 2ax + b^2 = 0 \quad \cdots (*)$$

このとき, $b \neq 1$ である. 実際, $b = 1$ とすると, C_2 は原点を中心とする半径1の円で, C_1 と共有点をもたない. 方程式(*)の係数について

$$(-a)^2 - (1-b^2)b^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + \left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

(*)の重解を p とすると, 解と係数の関係により $p^2 = \frac{b^2}{1-b^2} \quad \cdots \textcircled{1}$

$$0 < p < 1 \text{ より } 0 < \frac{b^2}{1-b^2} < 1 \quad \text{すなわち} \quad 0 < b < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって
$$b = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}$$

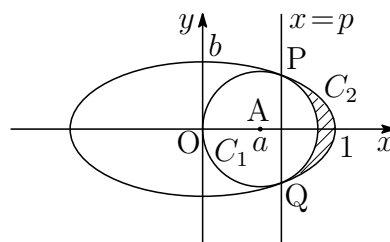
- (ii) C_1 と C_2 の接点が $(1, 0)$ であるとき, すなわち, $a = \frac{1}{2}$ のとき, C_1 の
中心を $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ とし, C_2 上の点 $P(\cos \theta, b \sin \theta)$ について, $AP \geq \frac{1}{2}$
であるから

$$\begin{aligned} \left(\cos \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + (b \sin \theta)^2 &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \cos^2 \theta - \cos \theta + b^2(1 - \cos^2 \theta) &\geq 0 \end{aligned}$$

$\theta = 0$ が接点であり, $\theta \rightarrow 0$ の極限で次式の右辺は極大となるから

$$b^2 \geq 1 - \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad \text{ゆえに} \quad b \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i),(ii) から
$$\begin{aligned} 0 < a < \frac{1}{2} \text{ のとき } & b = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}} \\ a = \frac{1}{2} \text{ のとき } & b \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



(2) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $C_2: x^2 + 3y^2 = 1$ ゆえに $p^2 + 3q^2 = 1$

① より, $p^2 = \frac{1}{2}$ ゆえに $q^2 = \frac{1}{6}$ よって $(p, q) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(3) $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ を (1) の結果に代入して

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}$$

$0 < a < \frac{1}{2}$ に注意すると $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$

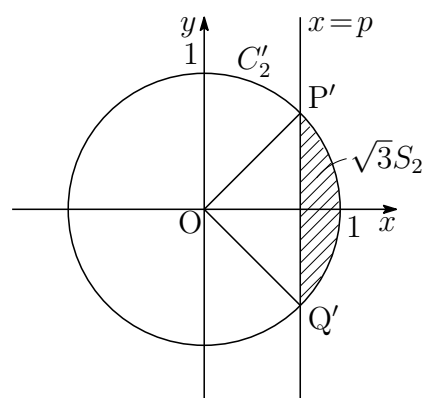
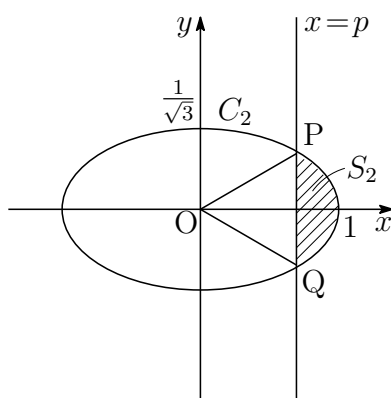
$x = p$ は, 2点 $(a, 0)$, $(2a, 0)$ を結ぶ線分の垂直二等分線であるから, $P(p, q)$, $Q(p, -q)$ とおくと, $\angle PAQ = \frac{2}{3}\pi$ となる.

したがって, 右の図の斜線部分 S_1 の面積は

$$S_1 = \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{2}{3}\pi - \sin \frac{2}{3}\pi \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2}{27}\pi - \frac{\sqrt{3}}{18}$$

下の図の $C_2: x^2 + 3y^2 = 1$ と $x = p$ で囲まれた斜線部分の面積を S_2 とする. C_2 を x 軸を元に y 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍拡大した図形を $C'_2: x^2 + y^2 = 1$ とすると, 直線 $x = p$ と C'_2 との交点は (p, p) , $(p, -p)$ であり, これらをそれぞれ P' , Q' とおくと, $\angle P'OQ' = \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\sqrt{3}S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \left(\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{6}$$



求める面積を S とすると, S は (1) の図の斜線部分であるから

$$S = S_2 - S_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{2}{27} \right) \pi - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

解説

一般に、曲線 $C : (x, y) = (x(t), y(t))$ の曲率半径 r (曲率 κ の逆数) は²

$$r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$$

C の単位接ベクトル $\xi_1 = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$ を $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させた単位法ベクトルを $\xi_2 = \left(-\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$ とすると、曲率中心 (c_1, c_2) は

$$\begin{aligned} (c_1, c_2) &= (x, y) + r\xi_2 \\ &= (x, y) + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}(-y', x') \end{aligned}$$

$C_2 : (x, y) = (\cos \theta, b \sin \theta)$ の曲率半径 r および曲率中心 (c_1, c_2) は

$$\begin{aligned} r &= \frac{(\sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}{b}, \\ (c_1, c_2) &= (\cos \theta, b \sin \theta) + \frac{\sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{b}(-b \cos \theta, -\sin \theta) \end{aligned}$$

C_2 の点 $(1, 0)$, すなわち, $\theta = 0$ における曲率半径および曲率中心は

$$r = b^2, \quad (c_1, c_2) = (1 - b^2, 0)$$

このとき, C_1 の半径は $\frac{1}{2}$ であるから, これが C_2 の接触円であるとき

$$b^2 = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

C_1 と C_2 の接触³ について, 次のようになる.

(i) $0 < a < \frac{1}{2}$, $b = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}$ のとき, 1 次接触をなす.

(ii) $a = \frac{1}{2}$, $b > \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 1 次の接触をなす.

(iii) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, 2 次の接触をなす. このとき, C_1 は C_2 の頂点 $(1, 0)$ における接触円 (曲率円) である.

² http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai.ri_2009.pdf [3], [5] を参照.

³ http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai.i_2017.pdf (p.10 を参照)

補足

放物線 $y^2 = 4px$, すなわち, 曲線 $P : (x, y) = \left(\frac{t^2}{4p}, t\right)$ について

$$x' = \frac{t}{2p}, \quad x'' = \frac{1}{2p}, \quad y' = 1, \quad y'' = 0$$

ゆえに $x'^2 + y'^2 = \frac{t^2}{4p^2} + 1, \quad x'y'' - x''y' = -\frac{1}{2p}$

したがって, P の曲率中心は

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{t^2}{4p}, t\right) + \left(\frac{t^2}{4p^2} + 1\right)(2p, -t)$$

特に, P の頂点 $(0, 0)$ における曲率中心は $(2p, 0)$ であり, この曲率中心と放物線 P の焦点 $(p, 0)$, 頂点 $(0, 0)$, 準線 $x = -p$ が等間隔にある.

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), すなわち $E : (x, y) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ について

$$x' = -a \sin \theta, \quad x'' = -a \cos \theta, \quad y' = b \cos \theta, \quad y'' = -b \sin \theta$$

ゆえに $x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta, \quad x'y'' - x''y' = ab$

したがって, E の曲率中心は

$$(c_1, c_2) = (a \cos \theta, b \sin \theta) + \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}{ab}(-b \cos \theta, -a \sin \theta)$$

特に, E の頂点 $(\pm a, 0)$ における曲率中心は $\left(\pm \frac{a^2 - b^2}{a}, 0\right)$ である.

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$), すなわち $H : (x, y) = \left(\frac{a}{\cos \theta}, b \tan \theta\right)$ について

$$x' = \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}, \quad x'' = \frac{a(2 - \cos^2 \theta)}{\cos^3 \theta}, \quad y' = \frac{b}{\cos^2 \theta}, \quad y'' = \frac{2b \sin \theta}{\cos^3 \theta}$$

ゆえに $x'^2 + y'^2 = \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2}{\cos^4 \theta}, \quad x'y'' - x''y' = -\frac{ab}{\cos^3 \theta}$

したがって, H の曲率中心は

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{a}{\cos \theta}, b \tan \theta\right) - \frac{a^2 \sin^2 \theta + b^2}{ab \cos \theta} \left(-\frac{b}{\cos^2 \theta}, \frac{a \sin \theta}{\cos^2 \theta}\right)$$

特に, H の頂点 $(\pm a, 0)$ における曲率中心は $\left(\pm \frac{a^2 + b^2}{a}, 0\right)$ である.

楕円 E と双曲線 H は, それらの離心率 e を用いると⁴, 曲率中心は $(\pm ae^2, 0)$ となる. 曲率中心 $(\pm ae^2, 0)$, 焦点 $(\pm ae, 0)$, 頂点 $(\pm a, 0)$, 準線 $x = \pm \frac{a}{e}$ の x 座標は等比数列をなす (複号同順). ■

⁴<http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou-jou-2010.pdf> [3] を参照.