

平成 24 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 180 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 24 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4 5 6

- 1 (1) 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D, 辺 OC の中点を E とする. 2 つのベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{AC}$ との内積を求めよ.
- (2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\frac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき, 目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ.
- 2 (1) $\log_{10} 3 = 0.4771$ として, $\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ.
- (2) 実数 a に対して, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す. 10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか.
- 3 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C , 直線 $y = ax$ を l とする.
- (1) C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた範囲内にあるとき, C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ.
- 4 n を正の整数とする. 数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める.

- (1) a_2 および a_3 を求めよ.
- (2) 一般項 a_k を求めよ.
- (3) $b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$ を示せ.

5 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする. 原点 $O(0, 0)$ と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ}$ が成り立つ. ただし, P', Q' はそれぞれ P, Q の f による像を表す.

(1) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ を示せ.

(2) 1 次変換 f により, 点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るとき, A を求めよ.

6 xyz 空間に 4 点 $P(0, 0, 2), A(0, 2, 0), B(\sqrt{3}, -1, 0), C(-\sqrt{3}, -1, 0)$ をとる. 四面体 $PABC$ の $x^2 + y^2 \geq 1$ を満たす部分の体積を求めよ.

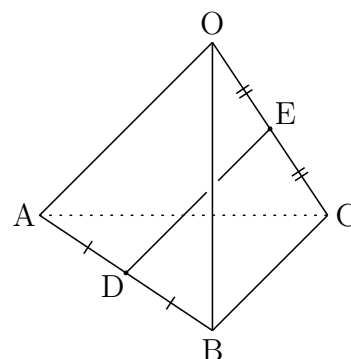
解答例

1 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), & \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2}\vec{c}, \\ \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}), \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}\end{aligned}$$

$$\text{このとき } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{よって } \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(|\vec{c} - \vec{a}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b}) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\overrightarrow{AC}|^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$



(2) ○を偶数, △を1または3とすると, 目の積が10の倍数となる組合せは

$$\{5, 5, \bigcirc\}, \quad \{5, \bigcirc, \bigcirc\}, \quad \{5, \bigcirc, \triangle\}$$

したがって, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{3}{6}\right)^2 \times 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \times 3! = \frac{9 + 27 + 36}{6^3} = \frac{1}{3}$$

別解 偶数が出ない事象を A , 5が出ない事象を B とすると, 求める確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 \\ &= \frac{216 - 27 - 125 + 8}{216} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$



2 (1) $N = 3^{100}$ とおくと $\sum_{n=0}^{99} 3^n = \frac{1(3^{100} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{100} - 1}{2} = \frac{N - 1}{2}$

このとき $N - \frac{N - 1}{2} = \frac{N + 1}{2} > 0$, $\frac{N - 1}{2} - \frac{N}{3} = \frac{N - 3}{6} > 0$

ゆえに $\frac{N}{3} < \frac{N - 1}{2} < N \quad \dots (*)$

ここで $\log_{10} N = \log_{10} 3^{100} = 100 \log_{10} 3 = 47.71 < 48$,

$$\log_{10} \frac{N}{3} = \log_{10} N - \log_{10} 3 = 47.71 - 0.4771 > 47$$

(*) の辺々の常用対数をとると、上の結果により

$$47 < \log_{10} \frac{N}{3} < \log_{10} \frac{N - 1}{2} < \log_{10} N < 48$$

したがって $10^{47} < \frac{N - 1}{2} < 10^{48}$

よって、求める桁数は **48** (桁)

(2) k を 99 以下の自然数とし、 $k^2 \leq n < (k + 1)^2$ のとき $[\sqrt{n}] = k$

このとき、条件を満たす n は、 $n = k^2, k(k + 1), k(k + 2)$ の 3 個ある。

$n = 100^2$ のとき、 $[\sqrt{n}]$ は n の約数である。

よって、求める個数は $3 \times 99 + 1 = \mathbf{298}$ (個) ■

3 (1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ と $y = ax$ から y を消去すると

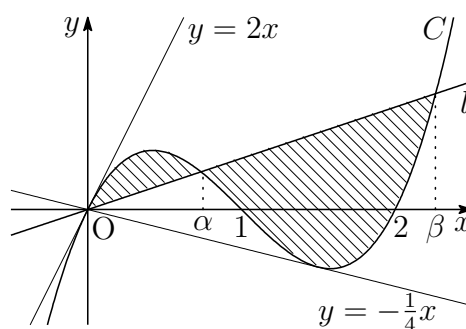
$$x(x^2 - 3x + 2 - a) = 0$$

C と l が原点以外の共有点をもつから、2 次方程式

$$x^2 - 3x + 2 - a = 0 \quad \dots (*)$$

が実数解をもつ。したがって、係数について

$$(-3)^2 - 4 \cdot 1(2 - a) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a \geq -\frac{1}{4}$$



(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ とすると $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

したがって, C の原点における接線の傾きは $f'(0) = 2$

$-\frac{1}{4} \leq a \leq 2$ のとき, 2 次方程式 (*) の解を α, β とすると ($0 \leq \alpha \leq \beta$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 2 - a \quad \dots (**)$$

$f(x) - ax = x(x^2 - 3x + 2 - a) = x(x - \alpha)(x - \beta)$ より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^\alpha x(x - \alpha)(x - \beta) dx - \int_\alpha^\beta x(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \int_0^\alpha x(\alpha - x)(\beta - x) dx + \int_\alpha^\beta \{(x - \alpha) + \alpha\}(x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \beta \int_0^\alpha x(\alpha - x) dx - \int_0^\alpha x^2(\alpha - x) dx \\ &\quad + \int_\alpha^\beta (x - \alpha)^2(\beta - x) dx + \alpha \int_\alpha^\beta (x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \beta \cdot \frac{1}{6} \alpha^3 - \frac{1}{12} \alpha^4 + \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^4 + \alpha \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12} \alpha^3 (2\beta - \alpha) + \frac{1}{12} (\beta - \alpha)^3 (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

(*) より, $\beta = 3 - \alpha$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{12} \alpha^3 \{2(3 - \alpha) - \alpha\} + \frac{1}{12} \{(3 - \alpha) - \alpha\}^3 \cdot 3 \\ &= \frac{1}{4} \{\alpha^3 (2 - \alpha) + (3 - 2\alpha)^3\} \end{aligned}$$

$g(\alpha) = S(a)$ とおく. このとき, (**) の第 1 式に注意して $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

$$g(\alpha) = \frac{1}{4} \{2\alpha^3 - \alpha^4 + (3 - 2\alpha)^3\} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \frac{1}{4} \{6\alpha^2 - 4\alpha^3 - 6(3 - 2\alpha)^2\} = \frac{1}{2} \{\alpha^2(3 - 2\alpha) - 3(3 - 2\alpha)^2\} \\ &= \frac{1}{2} (3 - 2\alpha)(\alpha^2 + 6\alpha - 9) = \frac{1}{2} (3 - 2\alpha)(\alpha + 3 + 3\sqrt{2})(\alpha + 3 - 3\sqrt{2}) \end{aligned}$$

α	0	$\dots$	$3\sqrt{2} - 3$	$\dots$	$\frac{3}{2}$
$g'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$g(\alpha)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, (**) より $a = 2 - \alpha\beta = 2 - \alpha(3 - \alpha)$
 $= 2 - (3\sqrt{2} - 3)\{3 - (3\sqrt{2} - 3)\} = \mathbf{38 - 27\sqrt{2}}$

解説

$C: y = ax^3 - 2akx^2 + cx$ ($a > 0$) と $l: y = mx$ から, y を消去すると

$$x(ax^2 - 2akx + c - m) = 0$$

C と l の共有点の x 座標が $0, \alpha, \beta$ であるとき ($0 \leq \alpha \leq \beta$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2k, \quad \alpha\beta = \frac{c-m}{a} \quad \text{また} \quad 0 < \alpha \leq k \leq \beta$$

このとき, l の傾きに関係なく, $\alpha + \beta$ の値は一定である.

C と l で囲まれた部分の面積を S とすると¹, 前ページの計算と同様にして

$$\begin{aligned} \frac{S}{a} &= \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta) dx - \int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{12}\alpha^3(2\beta-\alpha) + \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta) \\ &= \frac{1}{12}\alpha^3\{2(2k-\alpha)-\alpha\} + \frac{1}{12}\{(2k-\alpha)-\alpha\}^3 \cdot 2k \\ &= \frac{1}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k-\alpha)^3\} \end{aligned}$$

$f(\alpha) = S$ とおくと, $f(\alpha) = \frac{a}{12}\{-3\alpha^4 + 4k\alpha^3 + 16k(k-\alpha)^3\}$ より

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{a}{12}\{-12\alpha^3 + 12k\alpha^2 - 48k(k-\alpha)^2\} \\ &= \frac{a}{12}\{12\alpha^2(k-\alpha) - 48k(k-\alpha)^2\} \\ &= a(k-\alpha)(\alpha^2 + 4k\alpha - 4k^2) \\ &= a(k-\alpha)(\alpha + 2k + 2\sqrt{2}k)(\alpha + 2k - 2\sqrt{2}k) \end{aligned}$$

α	0	$\cdots$	$2(\sqrt{2}-1)k$	$\cdots$	k
$f'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$f(\alpha)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

S が最大となるとき $\alpha = 2(\sqrt{2}-1)k$, $\beta = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)k$ ゆえに $\alpha : \beta = 1 : \sqrt{2}$

この結果を (**) に適用すると, a は簡単に求めることができる. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf の 1 を参照.

$$\boxed{4} \quad (1) \quad a_1 = \frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1} = -\frac{1}{k+n+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$k=1$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{1+n+1} + \frac{n}{1} a_1 = -\frac{1}{n+2} + n \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$k=2$ を代入すると

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2+n+1} + \frac{n}{2} (a_1 + a_2) \\ &= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= -\frac{1}{n+3} + \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から, k 以下のすべての自然数について

$$a_k = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k} \quad \dots (*)$$

が成立すると仮定すると, 漸化式により

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= -\frac{1}{n+k+1} + \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{n+i-1} - \frac{1}{n+i} \right) \\ &= -\frac{1}{n+k+1} + \frac{n}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) = \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1} \end{aligned}$$

したがって, k を $k+1$ と置き換えたときも $(*)$ が成立する.

よって, すべての自然数 k について $(*)$ は成立するから, 求める一般項は

$$a_k = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$

(3) (2) の結果から
$$a_k = \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

$$\frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} < \frac{1}{(n+k-1)^2} \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{n+k} < \sqrt{a_k} < \frac{1}{n+k-1}$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \text{ より } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} < b_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1}$$

$$\text{ゆえに } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} \quad \cdots (**)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k-1}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

(**) にはさみうちの原理を適用すると $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$

$$\begin{aligned} \text{別解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} &> \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{n+x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n+x) \right]_1^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n+1}{n+1} = \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-1} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{k-2}^{k-1} \frac{dx}{n+x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^{n-1} \frac{dx}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log(n+x) \right]_{-1}^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{2n-1}{n-1} = \log 2 \end{aligned}$$

上の2式と (**) から, はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \log 2$ ■

- 5 (1) f による原点と異なる 3 点 $(1, 0)$, $(0, 1)$, (x, y) の像が, それぞれ

$$(a, c), (b, d), (ax + by, cx + dy)$$

であるから, 条件を満たすとき

$$\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{1} = \frac{\sqrt{b^2 + d^2}}{1} = \frac{\sqrt{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

辺々を平方すると

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = \frac{(a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy}{x^2 + y^2}$$

したがって $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, $ab + cd = 0 \quad \dots (*)$

よって, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ が成り立つ.

- (2) (1) の結果から, $\vec{v} \neq \vec{0}$ のとき

$$\frac{|\vec{Av}|}{|\vec{v}|} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2}$$

条件から, $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$ のとき, $\vec{Av} = (-4, 0)$ を上式に代入すると

$$\frac{4}{2} = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4 \quad \dots (**)$$

f により点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るから

$$(\#) \begin{cases} a + b\sqrt{3} = -4 \\ c + d\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

(*), (**) より $(b, d) = (\pm c, \mp a)$

(i) $(b, d) = (c, -a)$ のとき, これを (#) に代入すると

$$\begin{cases} a + c\sqrt{3} = -4 \\ c - a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $(b, d) = (-c, a)$ のとき, これを (#) に代入すると

$$\begin{cases} a - c\sqrt{3} = -4 \\ c + a\sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

(i), (ii) より $A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \mp\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$

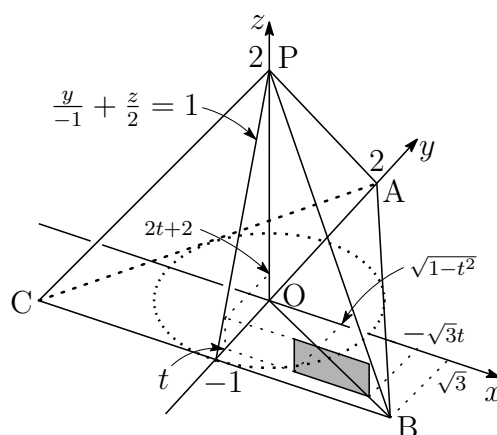
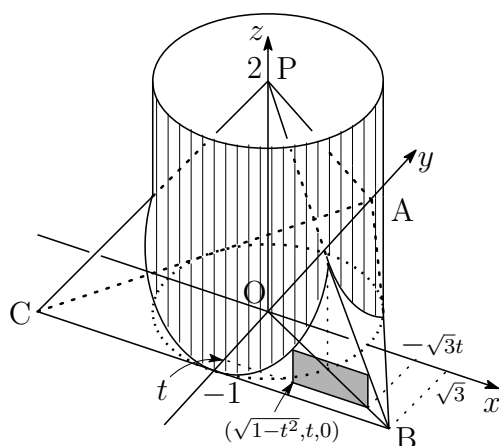


- 6 $x \geq 0, y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x, -1 \leq y \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq z \leq 2y+2, x^2+y^2 \geq 1$ の表す領域を平面 $y=t$ で切った切り口は $\left(-1 \leq t \leq -\frac{1}{2}\right)$

$$(\sqrt{1-t^2}, t, 0), (-\sqrt{3}t, t, 0), (\sqrt{1-t^2}, t, 2t+2), (-\sqrt{3}t, t, 2t+2)$$

を頂点とする長方形であるから、その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2})(2t+2)$$



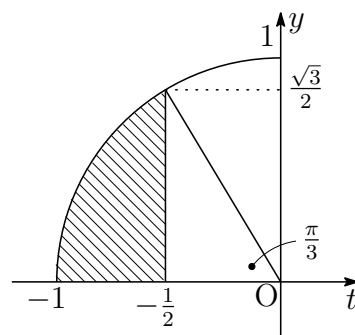
求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{6} &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} S(t) dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-\sqrt{3}t - \sqrt{1-t^2})(2t+2) dt \\ &= \left[-\sqrt{3} \left(\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right) + \frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}} - 2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{12} - 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

よって $V = 4\sqrt{3} - 2\pi$

補足 $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt$ は、右の図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

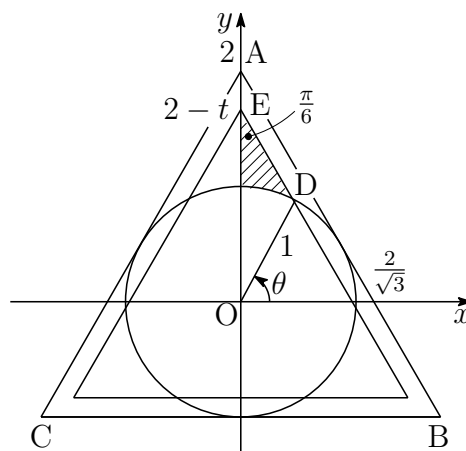


別解 $x \geq 0, y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, x^2 + y^2 \geq 1$ および平面

ABP($\sqrt{3}x + y + z = 2$) で囲まれた領域を平面 $z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切った切り口は右の図の斜線部分で、その面積を S とする。右の図の OD と x 軸の正の向きとなす角を θ とし、 $\triangle ODE$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{OE}{\sin \angle ODE} = \frac{OD}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$$OD = 1, OE = 2 - t, \angle ODE = \theta + \frac{\pi}{3}$$



$$\text{ゆえに } 2 - t = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad \frac{dt}{d\theta} = -2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1(2 - t) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{6} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} S \frac{dt}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \cos \theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right\} \left\{ -2 \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\sin \left(2\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \cos \theta + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ -\frac{1}{2} \sin \left(3\theta + \frac{2}{3}\pi \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right\} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{6} \cos \left(3\theta + \frac{2}{3}\pi \right) + \frac{1}{2} \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって } V = 4\sqrt{3} - 2\pi$$

1998 東京大学 (理科) 前期

xyz 空間に 5 点 $A(1, 1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(-1, -1, 0)$, $D(1, -1, 0)$, $P(0, 0, 3)$ をとる. 四角錐 $PABCD$ の

$$x^2 + y^2 \geq 1$$

のみたす部分の体積を求めよ.

解答 $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $x + \frac{z}{3} \leq 1$,
 $z \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$ の表す領域を平面
 $x = t \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq 1 \right)$ による切り口は

$$\begin{aligned} &(t, \sqrt{1-t^2}, 0), \\ &(t, t, 0), \\ &(t, \sqrt{1-t^2}, 3-3t), \\ &(t, t, 3-3t) \end{aligned}$$

を頂点とする長方形であるから,
 その面積を $S(t)$ とすると

$$S(t) = (t - \sqrt{1-t^2})(3-3t)$$

求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{8} &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 S(t) dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (t - \sqrt{1-t^2})(3-3t) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^2 - t^3 - (1-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 - 3 \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{8}\pi \end{aligned}$$

よって $V = 4 + 4\sqrt{2} - 3\pi$

