

平成 21 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 21 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

- 1 点 P から放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき, 2 つの接点を A, B とし, 線分 PA, PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする. PA, PB が直交するときの S の最小値を求めよ.

- 2 実数 a に対し, 次の 1 次変換

$$f(x, y) = (ax + (a - 2)y, (a - 2)x + ay)$$

を考える. 以下の 2 条件をみたす直線 L が存在するような a を求めよ.

- (i) L は $(0, 1)$ を通る.
(ii) 点 Q が L 上にあれば, その f による像 $f(Q)$ も L 上にある.
- 3 N を正の整数とする. $2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で, 方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか.
- 4 xyz 空間の原点と点 $(1, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする.

- (1) ℓ 上の点 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ を通り ℓ と垂直な平面が, xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ.
- (2) 不等式 $0 \leq y \leq x(1 - x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする. ℓ を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

解答例

1 $C: y = \frac{1}{2}x^2$ とすると $y' = x$

$\alpha < \beta$ とし, C 上の点 $A\left(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2\right)$ における接線は

$$y - \frac{1}{2}\alpha^2 = \alpha(x - \alpha) \quad \text{すなわち} \quad y = \alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2$$

同様に, C 上の点 $B\left(\beta, \frac{1}{2}\beta^2\right)$ における接線は

$$y = \beta x - \frac{1}{2}\beta^2$$

これら 2 接線の交点 P の x 座標は, 2 式から y を消去して

$$\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 = \beta x - \frac{1}{2}\beta^2 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha - \beta)(2x - \alpha - \beta) = 0$$

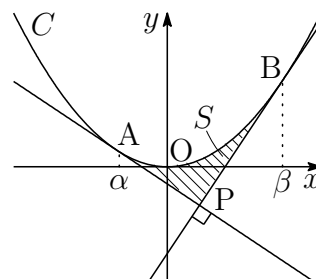
$$\alpha - \beta \neq 0 \text{ であるから } x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \left(\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 \right) \right\} dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \left\{ \frac{1}{2}x^2 - \left(\beta x - \frac{1}{2}\beta^2 \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x - \alpha)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \frac{1}{6} \left[(x - \beta)^3 \right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} = \frac{1}{24}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

2 直線 PA , PB は直交するから $\alpha\beta = -1$ $\alpha < \beta$ より $\alpha < 0 < \beta$

$$\text{ゆえに} \quad \beta - \alpha = \beta + \frac{1}{\beta} \geq 2\sqrt{\beta \cdot \frac{1}{\beta}} = 2$$

$$\text{したがって} \quad S \geq \frac{1}{24} \cdot 2^3 = \frac{1}{3} \quad \text{よって, 求める } S \text{ の最小値は } \frac{1}{3}$$



2 1 次変換 f の表す行列を

$$A = \begin{pmatrix} a & a-2 \\ a-2 & a \end{pmatrix}$$

とする. A の固有方程式は

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 4a - 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \lambda = 2, 2a - 2$$

[1] $a \neq 2$ のとき

固有値 $\lambda = 2, 2a - 2$ に対する固有ベクトルを, それぞれ

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする. 直線 L の方向ベクトルと平行なベクトルは

$$(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & a-2 \\ a-2 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

これが $\vec{v}$ に一致することはないので, L の方向ベクトルは $\vec{u}$ であるから

$$\begin{pmatrix} a-2 \\ a-1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2}$$

このとき, L は点 $(0, 1)$ を通り, 方向ベクトルが $\vec{u}$ の直線

[2] $a = 2$ のとき

$A = 2E$ であるから, $A - E = E$ より, L の方向ベクトルは

$$(A - E) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このとき, L は点 $(0, 1)$ を通り, 方向ベクトルが $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の直線

[1], [2] より $a = \frac{3}{2}, 2$

補足 対称行列の固有ベクトルは直交する¹. ■

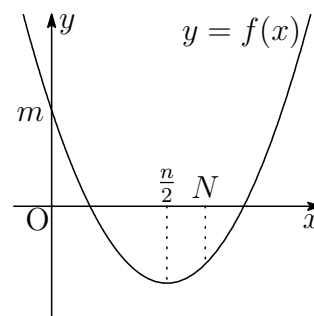
¹ <http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai.ri-2003.pdf> (p14 を参照)

3 $f(x) = x^2 - nx + m$ とおくと

$$f(x) = \left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + m - \frac{n^2}{4}$$

$n \leq 2N$ より, $\frac{n}{2} \leq N$ であるから,
 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる.

方程式 $f(x) = 0$ が, N 以上の実数解をもつから



$$f(N) = N^2 - nN + m \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad m \leq N(n - N)$$

次の不等式を同時にみたす (m, n) の組の個数を求めればよい (m, n は整数).

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq 2N & \cdots \textcircled{1} \\ 1 \leq n \leq 2N & \cdots \textcircled{2} \\ m \leq N(n - N) & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

m は正の整数であるから, ②, ③ より, n の取りうる値は

$$n = N + 1, N + 2, \dots, 2N$$

(i) $n = N + 1$ のとき ①, ③ より $1 \leq m \leq N$

(ii) $n = N + k$ のとき ($k = 2, 3, \dots, N$), ③ から $m \leq kN$
 $2N \leq kN$ であるから, ①, ③ より $1 \leq m \leq 2N$

(i), (ii) より, 求める個数は

$$1 \cdot N + (N - 1) \cdot 2N = N(2N - 1)$$

■

- 4 (1) ℓ の方向ベクトルは $\vec{v} = (1, 1, 1)$

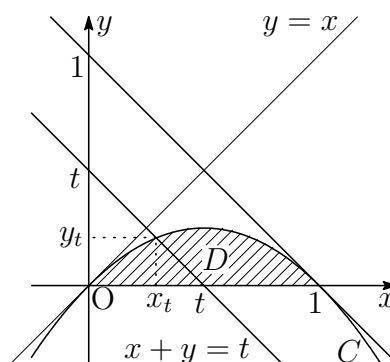
点 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$ を通り, ℓ に垂直な平面上の点を (x, y, z) とすると

$$(1, 1, 1) \perp \left(x - \frac{t}{3}, y - \frac{t}{3}, z - \frac{t}{3}\right) \quad \text{ゆえに} \quad x + y + z = t$$

これが xy 平面上の点であるから $x + y = t$

- (2) xy 平面において, 曲線 $y = x(1 - x)$ と直線 $x + y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) との交点を (x_t, y_t) とすると

$$\begin{aligned} x_t &= 1 - \sqrt{1 - t}, \\ y_t &= t - 1 + \sqrt{1 - t} \\ &= (1 - \sqrt{1 - t})\sqrt{1 - t} \end{aligned}$$



3点 $\left(\frac{t}{3}, \frac{t}{3}, \frac{t}{3}\right)$, $(x_t, y_t, 0)$, $(t, 0, 0)$ を順に P, Q, R とすると, $x_t + y_t = t$ に注意して

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(x_t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(y_t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{3}\right)^2 \\ &= x_t^2 + y_t^2 - \frac{2t}{3}(x_t + y_t) + \frac{t^2}{3} \\ &= (x_t + y_t)^2 - 2x_t y_t - \frac{t^2}{3} \\ &= \frac{2t^2}{3} - 2(1 - \sqrt{1 - t})^2 \sqrt{1 - t}, \\ PR^2 &= \left(t - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{t}{3}\right)^2 = \frac{2t^2}{3} \end{aligned}$$

$s = OP$ とすると $s = \frac{t}{\sqrt{3}}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \begin{array}{c|c} s & 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (PR^2 - PQ^2) ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 2(1 - \sqrt{1 - t})^2 \sqrt{1 - t} dt$$

$$u = \sqrt{1-t} \text{ とおくと } t = 1 - u^2 \quad \frac{dt}{du} = -2u \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow 1 \\ \hline u & 1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^0 2(1-u)^2 u \cdot (-2u) du \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^1 u^2 (1-u)^2 du \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2!2!}{5!} (1-0)^5 = \frac{2\sqrt{3}}{45} \end{aligned}$$

よって，求める回転体の体積は $V = \frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$

補足 定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる².



²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf [1]