

平成19年度 東京工業大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成19年2月25日

問題 1 2 3 4

1 p を素数, n を0以上の整数とする.

- (1) m は整数で $0 \leq m \leq n$ とする. 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ.
- (2) 1 から p^{n+1} までの2つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 (x, y) の個数を求めよ.

2 正数 a に対して, 放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線を, A を中心に -30° 回転した直線を ℓ とする. ℓ と $y = x^2$ との交点で A でない方を B とする. さらに点 $(a, 0)$ を C , 原点を O とする.

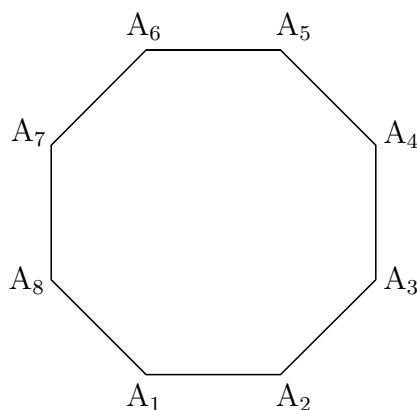
- (1) ℓ の式を求めよ.
- (2) 線分 OC , CA と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$, 線分 AB と $y = x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする. このとき

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)}$$

を求めよ.

3 一辺の長さが1の正八角形 $A_1A_2 \cdots A_8$ の周上に3点 P, Q, R が動くとする.

- (1) $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.
- (2) Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し, $\angle PQR = 90^\circ$ となるときの $\triangle PQR$ の面積の最大値を求めよ.



- 4 (1) 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ と正数 a_n に対して

$$f_n(x) = a_n(x - n)(n + 1 - x)$$

とおく. 2つの曲線 $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ.

- (2) $f_n(x)$ は (1) で定めたものとする. $y = f_0(x)$, $y = e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0 , $n \geq 1$ に対し $y = f_{n-1}(x)$, $y = f_n(x)$ と $y = e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n)$$

を求めよ.

解答例

- 1** (1) 1 から p^{n+1} までの整数について (p は素数), p^m で割り切れるものの個数は

$$\frac{p^{n+1}}{p^m} = p^{n-m+1}$$

また, p^{m+1} で割り切れるものの個数は

$$\frac{p^{n+1}}{p^{m+1}} = p^{n-m}$$

よって, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数は

$$p^{n-m+1} - p^{n-m} \quad (\text{個})$$

- (2) (1) の結果から, 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p で丁度 m 回割れるものの個数を

$$a_m = \begin{cases} p^{n-m+1} - p^{n-m} & (0 \leq m \leq n) \\ 1 & (m = n+1) \end{cases}$$

とし, 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^k の倍数の個数を

$$b_k = \frac{p^{n+1}}{p^k} = p^{n-k+1} \quad (0 \leq k \leq n+1)$$

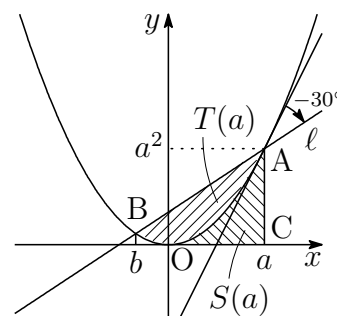
とする. 求める (x, y) の組の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a_k b_{n+1-k} &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n+1-k} + a_{n+1} b_0 \\ &= \sum_{k=0}^n (p^{n-k+1} - p^{n-k}) p^k + 1 \cdot p^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (p^{n+1} - p^n) + p^{n+1} \\ &= (n+1)(p^{n+1} - p^n) + p^{n+1} \\ &= (n+2)p^{n+1} - (n+1)p^n \quad (\text{個}) \end{aligned}$$

■

- 2 (1) $y = x^2$ より $y' = 2x$ である. 放物線 $y = x^2$ 上の点 $A(a, a^2)$ における接線の傾きは $2a$ であるから, $\tan \theta = 2a$, 直線 ℓ の傾きを m とすると

$$\begin{aligned} m &= \tan(\theta - 30^\circ) = \frac{\tan \theta - \tan 30^\circ}{1 + \tan \theta \tan 30^\circ} \\ &= \frac{2a - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



よって, 直線 ℓ の方程式は $y = \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}}(x - a) + a^2$

$$(2) S(a) = \int_0^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$B(b, b^2)$ とおくと, 2点 A, B を通る直線の傾き m は

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = a + b \quad \dots \textcircled{2}$$

ゆえに, 直線 ℓ の方程式は

$$y = (a + b)(x - a) + a^2 \quad \text{すなわち} \quad y = (a + b)x - ab$$

したがって, 直線 ℓ と放物線 $y = x^2$ で囲まれる部分の面積 $T(a)$ は

$$\begin{aligned} T(a) &= \int_b^a \{(a + b)x - ab - x^2\} dx \\ &= - \int_b^a (x - a)(x - b) dx = \frac{1}{6}(a - b)^3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } b = m - a \text{ であるから } T(a) = \frac{1}{6}(2a - m)^3$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \lim_{a \rightarrow \infty} m = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3}a - 1}{2a + \sqrt{3}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{3} - \frac{1}{a}}{2 + \frac{\sqrt{3}}{a}} = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T(a)}{S(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}(2a - m)^3}{\frac{1}{3}a^3} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(2 - \frac{m}{a} \right)^3 = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4 \end{aligned}$$

■

- 3** (1) 一般性を失うことなく、点Pは線分 A_1A_2 上の点、対称性により点Qは辺 A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 上の点、点Rは正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上の任意の点とする.

(i) 点Qが辺 A_1A_2 上にあるとき

$$\triangle PQR \leq \triangle A_1A_2A_6 < \triangle A_1A_3A_6$$

(ii) 点Qが辺 A_2A_3 上にあるとき (Fig-1)

$$\triangle PQR \leq PQA_6 \leq \triangle PA_3A_6 \leq \triangle A_1A_3A_6$$

(iii) 点Qが辺 A_3A_4 上にあるとき、次の2つの場合がある.

$$\triangle PQR \leq PQA_6 \leq \triangle A_1QA_6 = \triangle A_1A_3A_6 \quad (\text{Fig-2})$$

$$\triangle PQR \leq PQA_7 \leq \triangle A_4PA_7 = \triangle A_4A_2A_7 = \triangle A_1A_3A_6$$

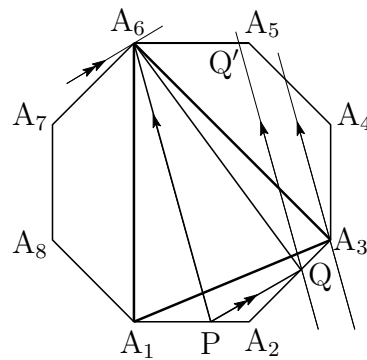


Fig-1

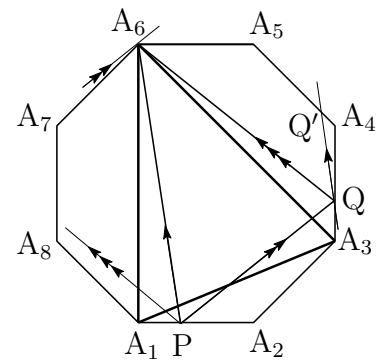
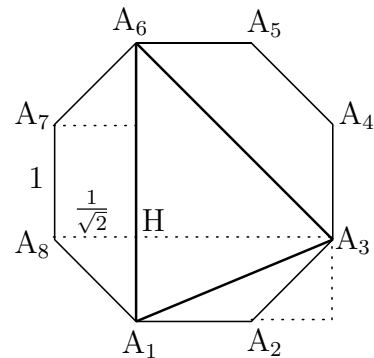


Fig-2

(iv) (i)~(iii) で示したQについて、 $PA_6 \parallel QQ'$ となる点 Q' を辺 A_4A_5 , A_5A_6 にとることができる、 $\triangle PQR = \triangle PQ'R \leq \triangle A_1A_3A_6$ が成立する.

(i)~(iv) より、 $\triangle PQR$ の面積の最大値は、
右の図の $\triangle A_1A_3A_6$ の面積に等しい.

$$\begin{aligned} \triangle A_1A_3A_6 &= \frac{1}{2} A_1A_6 \cdot A_3H \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2} + 4}{4} \end{aligned}$$



補足 (iii) において、三角形の面積を最大にするとき、 A_6 にとる場合と A_7 にとる場合があり、これらは鏡像 (2点 A_6 , A_7 の垂直二等分線に関して対称) であるから、第1式と第2式ではPとQ, A_1 と A_4 , A_2 と A_3 , A_6 と A_7 が入れ替わる.

- (2) 正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の外接円の半径を r とすると、余弦定理により

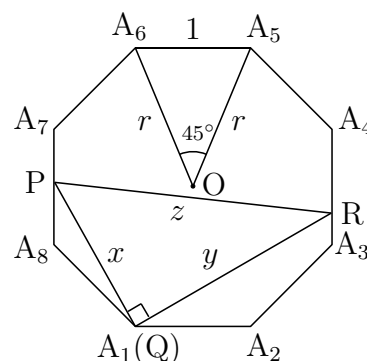
$$\begin{aligned} 1^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 45^\circ \\ &= (2 - \sqrt{2})r^2 \end{aligned}$$

これを解いて $r^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

$PQ = x$, $QR = y$, $PR = z$ とすると

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2}xy = \frac{1}{4}\{x^2 + y^2 - (x - y)^2\} \\ &\leq \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 \leq \frac{1}{4}(2r)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 \leq r^2 \end{aligned}$$

$\triangle PQR$ の面積は、 $z = 2r$, $x = y$, すなわち、 $P = A_7$, $R = A_3$ のとき、
最大値 $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ をとる. ■



- 4 (1) $f_n(x) = a_n(x - n)(n + 1 - x)$ より ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$f'_n(x) = a_n(-2x + 2n + 1)$$

$g(x) = e^{-x}$ とすると $g'(x) = -e^{-x}$

2つの関数 $f_n(x)$, $g(x)$ のグラフが $x = t$ で接するとき

$$f_n(t) = g(t), \quad f'_n(t) = g'(t)$$

すなわち $a_n(t - n)(n + 1 - t) = e^{-t} \quad \dots \textcircled{1}$

$$a_n(-2t + 2n + 1) = -e^{-t} \quad \dots \textcircled{2}$$

$a_n > 0$ に注意すると、 $\textcircled{2}$ から

$$-2t + 2n + 1 < 0 \quad \text{すなわち} \quad t > \frac{2n + 1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から $(t - n)(n + 1 - t) = -(-2t + 2n + 1)$

整理すると $t^2 - (2n - 1)t + n^2 - n - 1 = 0$

$\textcircled{3}$ に注意して、これを解くと $t = \frac{2n - 1 + \sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると

$$a_n(2 - \sqrt{5}) = -e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{よって} \quad a_n = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2) $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$T_n = \int_n^{n+1} \{e^{-x} - f_n(x)\} dx$$

とし, ④ より, $t_n = n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ とおくと,
 $n < t_n < n+1$ であるから, $n \geq 1$ のとき

$$\sum_{k=0}^{n-1} T_k < \sum_{k=0}^n S_k < \sum_{k=0}^n T_k \quad \dots (*)$$

が成立する.

(1) の結果より, $a_n = a_0 e^{-n}$ であるから $\left(a_0 = (2 + \sqrt{5})e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right)$

$$\int_n^{n+1} f_n(x) dx = \int_n^{n+1} a_n(x-n)(n+1-x) dx = \frac{1}{6}a_n = \frac{1}{6}a_0 e^{-n},$$

$$\begin{aligned} T_n &= \int_n^{n+1} e^{-x} dx - \int_n^{n+1} f_n(x) dx = \left[-e^{-x}\right]_n^{n+1} - \frac{1}{6}a_0 e^{-n} \\ &= e^{-n} - e^{-n-1} - \frac{1}{6}a_0 e^{-n} = \left(1 - e^{-1} - \frac{a_0}{6}\right) e^{-n}, \\ \sum_{k=0}^n T_k &= \left(1 - e^{-1} - \frac{a_0}{6}\right) \sum_{k=0}^n e^{-k} = \left(1 - e^{-1} - \frac{a_0}{6}\right) \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \\ &= 1 - e^{-n-1} - \frac{a_0}{6} \cdot \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n T_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} T_k = 1 - \frac{a_0}{6} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

上式および (*) から, はさみうちの原理により

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n S_k &= 1 - \frac{a_0}{6} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}} = 1 - \frac{1}{6} \cdot (2 + \sqrt{5})e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-1}} \\ &= 1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (S_0 + S_1 + \dots + S_n) = 1 - \frac{2 + \sqrt{5}}{6(e-1)} e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \blacksquare$$

