

平成18年度 東京工業大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成18年2月25日

問題 1 2 3 4

1 以下の問に答えよ.

(1) 自然数 n に対し $I(n) = \int_0^{n\pi/2} |\sin x| dx$ を求めよ.

(2) 次の不等式を示せ.

$$0 \leq \int_0^{s\pi/2} \cos x dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す. $[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ.

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} |\sin at| dt - 1 \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \left(1 - \frac{[a]}{a}\right)$$

2 以下の問に答えよ.

(1) a, b を正の定数とし, $g(t) = \frac{1}{b}t^a - \log t$ とおく. $t > 0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ極値を求めよ.

(2) m を正の定数とし, xy 座標平面において条件

$$(a) \ y > x > 0; \quad (b) \ \text{すべての } t > 0 \text{ に対し } \frac{1}{y}t^x - \log t \geq m$$

を満たす点 (x, y) からなる領域を D とする. D の概形を図示せよ.

(3) (2) の領域 D の面積を求めよ.

3 平面上を半径1の3個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき, これら3個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ.

(a) 3個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径1の円周上にある.

(b) 3個の円板すべてが共有する点は P のみである.

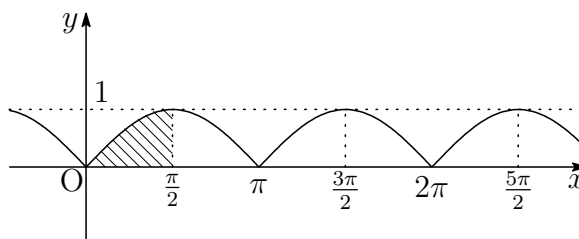
4 空間内の四面体 ABCD を考える．辺 AB, BC, CD, DA の中点を, それぞれ K, L, M, N とする．

- (1) $4\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$ を示せ．ここに $|\overrightarrow{AC}|$ はベクトル $\overrightarrow{AC}$ の長さを表す．
- (2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする．このとき $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ を示せ．
- (3) 辺 AC の中点を P とし, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{6}$ とする．
(2) の仮定のもとで, 四面体 PKLN の体積を求めよ．

解答例

- 1** (1) $y = |\sin x|$ のグラフの周期性および対称性により

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin x| dx = \cdots = \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} |\sin x| dx$$



$$\begin{aligned} I(n) &= \int_0^{\frac{n\pi}{2}} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{(k-1)\pi}{2}}^{\frac{k\pi}{2}} |\sin x| dx = \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \sum_{k=1}^n \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sum_{k=1}^n 1 = n \end{aligned}$$

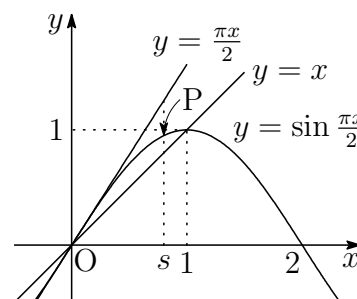
$$(2) \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{s\pi}{2}} = \sin \frac{s\pi}{2}$$

$y = \sin \frac{\pi x}{2}$ の原点における接線は

$$y = \frac{\pi x}{2}$$

原点と $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 上の点 $(1, 1)$ を通る直線は

$$y = x$$



曲線 $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ 上の点 $P\left(s, \sin \frac{s\pi}{2}\right)$ と上の 2 直線の位置関係から

$$s \leq \sin \frac{s\pi}{2} \leq \frac{s\pi}{2} \quad \text{ゆえに} \quad s \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx \leq \frac{s\pi}{2} \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (*)$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx - s \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)s \quad (0 \leq s \leq 1)$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt$ について, $x = at$ とおくと $\frac{dx}{dt} = a$

t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
x	$0 \longrightarrow \frac{a\pi}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx$$

$a = [a] + s$ とおくと, (1) の結果により

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx &= \int_0^{\frac{[a]\pi}{2}} |\sin x| dx + \int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{([a]+s)\pi}{2}} |\sin x| dx \\ &= [a] + \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \left| \sin \left(x + \frac{[a]\pi}{2} \right) \right| dx \end{aligned}$$

$[a]$ が奇数であるから, $\left| \sin \left(x + \frac{[a]\pi}{2} \right) \right| = |\cos x|$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx &= [a] + \int_0^{\frac{s\pi}{2}} |\cos x| dx \\ &= [a] + \int_0^{\frac{s\pi}{2}} \cos x dx \end{aligned}$$

(*) により, $[a] + s \leq \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx \leq [a] + \frac{s\pi}{2}$ となるから

$$\begin{aligned} a &\leq \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx \leq [a] + \frac{(a - [a])\pi}{2} \\ 0 &\leq \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx - a \leq [a] - a + \frac{(a - [a])\pi}{2} \\ 0 &\leq \frac{1}{a} \int_0^{\frac{a\pi}{2}} |\sin x| dx - 1 \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) (a - [a]) \\ 0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin at| dt - 1 \leq \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \left(1 - \frac{[a]}{a} \right) \end{aligned}$$

■

- 2 (1) $g(t) = \frac{1}{b}t^a - \log t$ より ($t > 0$)

$$g'(t) = \frac{a}{b}t^{a-1} - \frac{1}{t} = \frac{a}{bt} \left(t^a - \frac{b}{a} \right)$$

$c = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{a}}$ とおくと, $g(t)$ の増減表は

t	0	...	c	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, 極小値 $g(c) = \frac{1}{b}c^a - \log c = \frac{1}{a} \left(1 - \log \frac{b}{a} \right)$ をもつ.

- (2) (1) の結果から, すべての $t > 0$ に対して $\frac{1}{y}t^x - \log t \geq \frac{1}{x} \left(1 - \log \frac{y}{x} \right)$ したがって, 条件 (b) を満たすとき

$$\frac{1}{x} \left(1 - \log \frac{y}{x} \right) \geq m \quad \text{すなわち} \quad y \leq xe^{1-mx}$$

$y = xe^{1-mx}$ について

$$y' = e^{1-mx} + x(-me^{1-mx}) = (1 - mx)e^{1-mx}$$

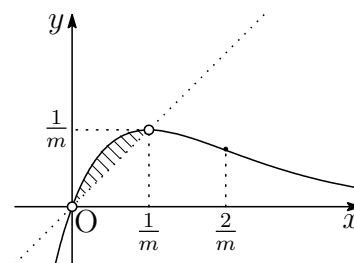
$$y'' = -me^{1-mx} + (1 - mx)(-me^{1-mx}) = m(mx - 2)e^{1-mx}$$

x	0	...	$\frac{1}{m}$	...	$\frac{2}{m}$	...
y'		+	0	-	-	-
y''		-	-	-	0	+
y		$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

したがって, D の表す不等式は

$$0 < x < y \leq xe^{1-mx}$$

である. D の表す領域は右の図の斜線部分である. ただし $\circ$ および点線部分は含まない. よって, 求める面積は



$$\int_0^{\frac{1}{m}} (xe^{1-mx} - x) dx = \left[-\left(\frac{x}{m} + \frac{1}{m^2} \right) e^{1-mx} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m^2} \left(e - \frac{5}{2} \right)$$

■

- 3** 3つの円板を C_1, C_2, C_3 とし, その中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 とする. また, 3つの円板の P 以外の共有点を右の図のように Q, R, S とする.

$$\angle O_1PO_2 = \alpha, \quad \angle O_2PO_3 = \beta, \quad \angle O_3PO_1 = \gamma$$

とおくと $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$

このとき, 条件 (b) より

$$0 < \alpha \leq \pi, \quad 0 < \beta \leq \pi, \quad 0 < \gamma \leq \pi$$

$\angle PO_1Q = \angle PO_2Q = \pi - \alpha$ であるから, C_1 と C_2 の部分の共通部分の面積は

$$\begin{aligned} S(C_1 \cap C_2) &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - \alpha) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin(\pi - \alpha) \right\} \\ &= \pi - \alpha - \sin \alpha \end{aligned}$$

同様にして $S(C_2 \cap C_3) = \pi - \beta - \sin \beta$

$$S(C_3 \cap C_1) = \pi - \gamma - \sin \gamma$$

したがって, 3つの円板 C_1, C_2, C_3 の和集合の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= S(C_1 \cup C_2 \cup C_3) \\ &= S(C_1) + S(C_2) + S(C_3) - S(C_1 \cap C_2) - S(C_2 \cap C_3) - S(C_3 \cap C_1) \\ &= \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 1^2 - (\pi - \alpha - \sin \alpha) - (\pi - \beta - \sin \beta) - (\pi - \gamma - \sin \gamma) \\ &= \alpha + \beta + \gamma + \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \\ &= 2\pi + \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \\ &= 2\pi + \sin \alpha + 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \\ &= 2\pi + \sin \alpha + 2 \sin \frac{2\pi - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 2\pi + \sin \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} < \frac{\beta - \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ より, 上式で等号が成立するのは, $\beta = \gamma$ のときに限る.

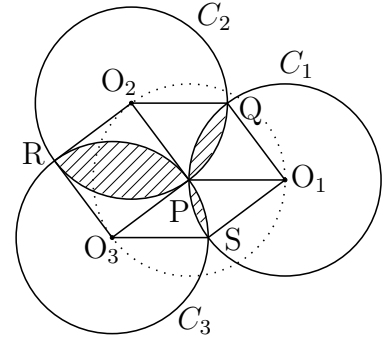
$f(\alpha) = 2\pi + \sin \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha - 1 \\ &= \left(2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

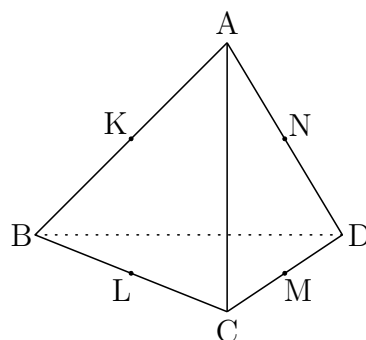
x	0	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	π
$f'(\alpha)$		+	0	-	
$f(\alpha)$		↗	極大	↘	

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{2\pi}{3} \text{ のとき, } S \text{ は最大値 } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

■



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AM} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{LN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AL} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC})
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{したがって } 4\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{LN} &= 2\overrightarrow{MK} \cdot 2\overrightarrow{LN} \\
&= -(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AC}) \\
&= -(|\overrightarrow{DB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2) = |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2
\end{aligned}$$

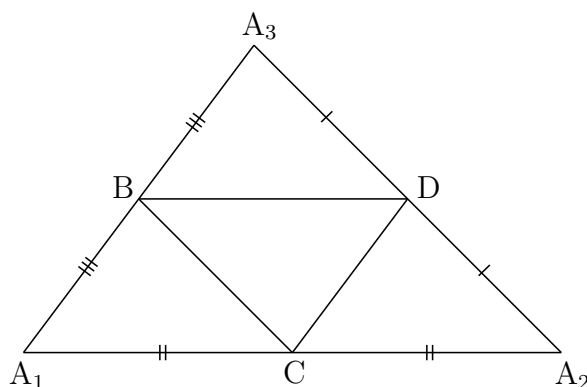
- (2) 四面体 ABCD の4つの面 $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle DAB$ はすべて互いに合同な三角形である. ある1つの三角形の3つの内角を α, β, γ とおくと, 三角形の内角の和より, 次式が成り立つ.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

いま, 頂点 A に集まる3つの面の角 ($\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle DAB$) に注目する. 4つの面はすべて合同であるから, 頂点 A に集まる3つの角は, 合同な三角形の3つの内角 α, β, γ がそれぞれ1つずつ現れたものである. したがって, 頂点 A のまわりの角の和は次を満たす.

$$\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

ここで, 四面体 ABCD を辺 AB, AC, AD で切り開き, 頂点 A がそれぞれ A_1, A_2, A_3 に分かれるように平面上に展開する (下図参照).



頂点 A のまわりの角の和がちょうど 180° であることから、展開図において A_1, B, A_3 および A_1, C, A_3 はそれぞれ一直線上に並ぶ。さらに、 $A_1B = AB$ などの等長関係が成り立つ。

この展開図において、 $\triangle A_1A_2A_3$ を考えると

- 点 B は辺 A_1A_3 の中点である ($A_1B = A_3B = AB$ より)。
- 点 C は辺 A_1A_2 の中点である ($A_1C = A_2C = AC$ より)。

よって、 $\triangle A_1A_2A_3$ における中点連結定理より、 BC と A_2A_3 は平行であり、その長さの比は次を満たす。

$$BC = \frac{1}{2}A_2A_3$$

一方で、点 D もまた辺 A_2A_3 の中点である ($A_2D = A_3D = AD$ より)。したがって、

$$A_2A_3 = A_2D + DA_3 = AD + AD = 2AD$$

が成り立つ。

これらを組み合わせると、次が得られる。

$$BC = \frac{1}{2}(2AD) = AD$$

すなわち、長さを表す絶対値記号を用いると

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$$

である。

全く同様の論理により、他の 2 組の対辺についても、

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

が成り立つ。

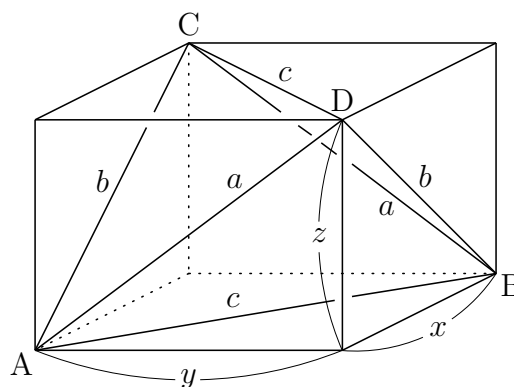
以上により、すべての面が互いに合同な四面体において、3 組の対辺の長さはそれぞれ等しい。

- (3) (2) の仮定から，四面体 ABCD は等面四面体である． $a = DA$ ， $b = DB$ ， $c = DC$ とすると，直方体の縦，横，高さがそれぞれ x ， y ， z で

$$y^2 + z^2 = a^2$$

$$z^2 + x^2 = b^2$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$



を満たすものが唯一存在する．実際

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad y^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

したがって，等面四面体はこの直方体に埋め込まれる．等面四面体の体積を V とすると¹(直方体から4つの直角四面体を除く)

$$\begin{aligned} V &= xyz - 4 \cdot \frac{1}{6}xyz = \frac{1}{3}xyz \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} \end{aligned}$$

$a = DA = BC = \sqrt{5}$ ， $b = DB = CA = \sqrt{6}$ ， $c = DC = AB = \sqrt{3}$ より

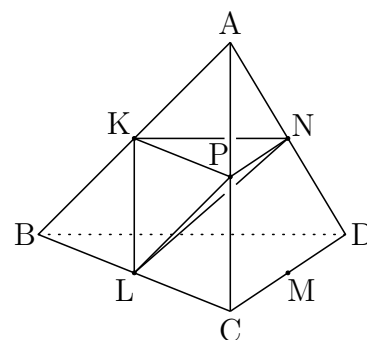
$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(6 + 3 - 5)(3 + 5 - 6)(5 + 6 - 3)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

K, P, N は AB, AC, AD の中点であるから，中点連結定理により，平面 KPN と平面 BCD は平行である．また，四面体 AKPN の体積は，四面体 ABCD の体積の $\frac{1}{2^3}$ であるから，その体積は

$$\frac{1}{8}V$$

△KPN に注目すると，四面体 AKPN と四面体 PKLN の体積は等しいから，求める体積は

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$



■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (pp.11-12)