

平成 17 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 17 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

1 e を自然対数の底とし、数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する.

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $n \geq 3$ のとき、次の漸化式を示せ.

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$$

(2) $n \geq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$ なることを示せ.

(3) $n \geq 2$ のとき、以下の不等式が成立することを示せ.

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)}(e-2)$$

2 1 から 6 までの目が $\frac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを振り、1 回目に出る目を α , 2 回目に出る目を β とする. 2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 + sx + t$ を $f(x)$ とおき $f(x)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする.

(1) s および t の期待値を求めよ.

(2) a, b, c および d の期待値を求めよ.

3 D を半径 1 の円盤, C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする. D がつぎの条件 (a), (b) を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき, D が通過する部分の体積を求めよ.

(a) D の中心は C 上にある.

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0, 1, 0)$ と直交する.

4 実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする.

(1) $s = x+y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ.

(2) 負でない定数 $m \geq 0$ をとるとき、 $xy + m(x+y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ.

解答例

1 (1) $a_n = \int_1^e (\log x)^n dx$ より ($n = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^e (x)' (\log x)^n dx = \left[x (\log x)^n \right]_1^e - \int_1^e x n (\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} dx \quad \dots (*) \end{aligned}$$

ゆえに $a_n = e - n a_{n-1} \dots (**)$ さらに $a_{n-1} = e - (n-1) a_{n-2}$
上の第1式から第2式の辺々の差をとると

$$a_n - a_{n-1} = -n a_{n-1} + (n-1) a_{n-2}$$

したがって $a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$

(2) $a_n = \int_1^e (\log x)^n dx > 0, \quad a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$

上の第1式および(1)の結果から $(n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) > 0 \quad (n \geq 3)$

$n \geq 3$ のとき $a_{n-2} - a_{n-1} > 0$ ゆえに $a_{n-2} > a_{n-1}$

よって, $n \geq 1$ に対し $a_n > a_{n+1} > 0$

別解 $n \geq 1$ に対して $a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+1} &= \int_1^e (\log x)^n dx - \int_1^e (\log x)^{n+1} dx \\ &= \int_1^e (\log x)^n (1 - \log x) dx > 0 \end{aligned}$$

よって, $n \geq 1$ に対して $a_n > a_{n+1} > 0$

(3) (1),(2)の結果から $(n-1)a_{n-2} = a_n + (n-1)a_{n-1}, \quad a_{n-1} > a_n$

上の2式から $(n-1)a_{n-2} = a_n + (n-1)a_{n-1} > a_n + (n-1)a_n$

したがって $(n-1)a_{n-2} > n a_n$ ゆえに $\frac{a_n}{a_{n-2}} < \frac{n-1}{n}$

(*) より $a_1 = 1$ さらに (**) より $a_2 = e - 2a_1 = e - 2$

$$\prod_{k=2}^n \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} < \prod_{k=2}^n \frac{2k-1}{2k} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{2n}}{a_2} < \prod_{k=2}^n \frac{2k-1}{2k}$$

よって, $n \geq 2$ のとき $a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots (2n)} (e-2)$

補足 (**) より $a_n + na_{n-1} = e \quad (n \geq 2)$

$$\frac{(-1)^n a_n}{n!} - \frac{(-1)^{n-1} a_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n e}{n!}$$

$a_0 = e - 1, a_1 = 1$ より, $n \geq 1$ について上式は成立する.

$$\begin{aligned} e \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{(-1)^k a_k}{k!} - \frac{(-1)^{k-1} a_{k-1}}{(k-1)!} \right\} \\ &= \frac{(-1)^n a_n}{n!} - a_0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{(-1)^n a_n}{n!} = a_0 + e \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - 1$$

$$\text{よって} \quad a_n = (-1)^n n! \left\{ e \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

解説 $a_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ と変形できるから, 部分積分法¹

$$\begin{aligned} \int f(x) g'(x) dx &= f(x) g(x) - f^{(1)}(x) g^{(-1)}(x) + f^{(2)}(x) g^{(-2)}(x) \\ &\quad \dots + (-1)^n f^{(n)}(x) g^{(-n)}(x) + (-1)^{n+1} \int f^{(n+1)}(x) g^{(-n)}(x) dx \end{aligned}$$

に $f(x) = x^n, g'(x) = e^x$ を適用すると, $f^{(n+1)}(x) = 0$ より

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\{f(x) - f'(x) + f''(x) + \dots + (-1)^n f^{(n)}(x)\} e^x \right]_0^1 \\ &= e \sum_{k=0}^n (-1)^k f^{(k)}(1) - (-1)^n f^{(n)}(0) \\ &= e \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} - (-1)^n n! \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} \text{ より, 上の 2 つの結果は一致する.}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.14 を参照)

2 (1) $(x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + sx + t$ より $s = -\alpha - \beta$, $t = \alpha\beta$

$$E(\alpha) = E(\beta) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}$$

確率変数 α , β は独立であるから

$$E(s) = E(-\alpha - \beta) = -E(\alpha) - E(\beta) = -\frac{7}{2} - \frac{7}{2} = -7$$

$$E(t) = E(\alpha\beta) = E(\alpha)E(\beta) = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$$

(2) $E(\alpha^2) = E(\beta^2) = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}$

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ より

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= (x - \alpha)^2(x - \beta)^2 \\ &= \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2 \\ &= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 + \{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 \\ &\quad - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + (\alpha\beta)^2 \end{aligned}$$

$f(x)^2 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ と係数を比較して

$$a = -2\alpha - 2\beta, \quad b = \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta, \quad c = -2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2, \quad d = \alpha^2\beta^2$$

確率変数 α , β は独立であるから

$$\begin{aligned} E(a) &= E(-2\alpha - 2\beta) = -2E(\alpha) - 2E(\beta) \\ &= -2 \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{7}{2} = -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(b) &= E(\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta) = E(\alpha^2) + E(\beta^2) + 4E(\alpha)E(\beta) \\ &= \frac{91}{6} + \frac{91}{6} + 4 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{238}{3} \end{aligned}$$

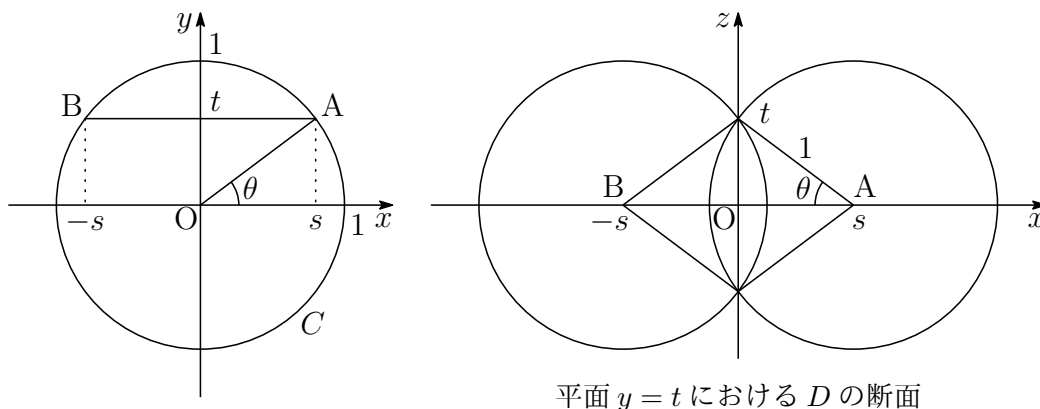
$$\begin{aligned} E(c) &= E(-2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2) = -2E(\alpha^2)E(\beta) - 2E(\alpha)E(\beta^2) \\ &= -2 \cdot \frac{91}{6} \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{91}{6} = -\frac{637}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(d) &= E(\alpha^2\beta^2) = E(\alpha^2)E(\beta^2) \\ &= \frac{91}{6} \cdot \frac{91}{6} = \frac{8281}{36} \end{aligned}$$

■

- 3 D の平面 $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$) における断面積を $S(t)$ とし, $t = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とおくと, 下の図から

$$\begin{aligned}\frac{S(t)}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 (2\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 2\theta \\ S(t) &= 2\pi - 2\theta + \sin 2\theta\end{aligned}$$



D の通過する領域は, 平面 $y = 0$ に関して対称であり, その体積を V とすると

$$\begin{aligned}V &= 2 \int_0^1 S(t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\pi - 2\theta + \sin 2\theta) \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \cos \theta - \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 4 \left[\pi \sin \theta - \theta \sin \theta - \cos \theta - \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi + \frac{16}{3}\end{aligned}$$

■

- 4 (1) $s = x + y$, $t = xy$ より, x, y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$(*) \quad \lambda^2 - s\lambda + t = 0$$

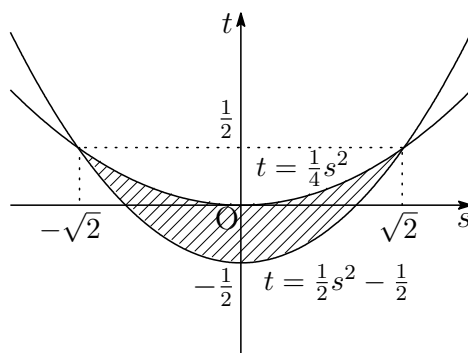
このとき, 2 次方程式 $(*)$ は実数解をもつから, 係数について

$$(-s)^2 - 4 \cdot 1 \cdot t \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t \leq \frac{1}{4}s^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

実数 x, y は, $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たすから, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ より

$$(x + y)^2 - 2xy = s^2 - 2t \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad t \geq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

求める領域は，下図のように ①，② を同時に満たす範囲で境界線を含む．



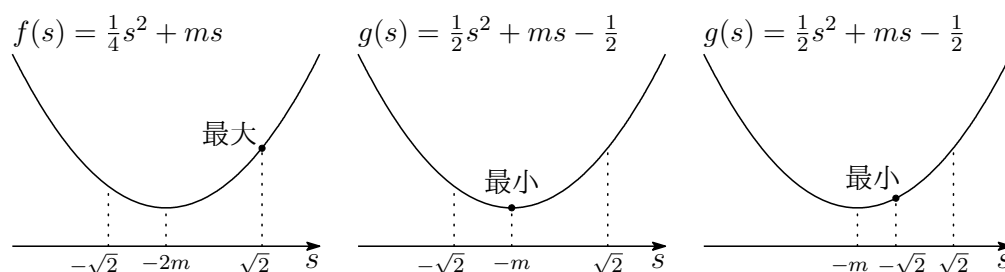
- (2) $xy + m(x + y) = t + ms$ より，この最大値，最小値は，(1) の結果から，それぞれ， $t = \frac{1}{4}s^2$ ， $t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$ ($-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$) でその値をとる．

$$f(s) = \frac{1}{4}s^2 + ms \text{ とおくと } (-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2})$$

$$f(s) = \frac{1}{4}(s + 2m)^2 - m^2$$

よって， $m \geq 0$ より，最大値 $f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} + m\sqrt{2}$

補足 定義域 $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$ の中央値 0 が軸 $s = -2m$ より右側にあるから，定義域の右端で最大値をとる．



$$g(s) = \frac{1}{2}s^2 + ms - \frac{1}{2} \text{ とおくと } (-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2})$$

$$g(s) = \frac{1}{2}(s + m)^2 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}$$

(i) $-\sqrt{2} \leq -m \leq 0$ ，すなわち， $0 \leq m \leq \sqrt{2}$ のとき，最小値 $g(-m)$

(ii) $-m \leq -\sqrt{2}$ ，すなわち， $\sqrt{2} \leq m$ のとき，最小値 $g(-\sqrt{2})$

よって 最小値 $\begin{cases} 0 \leq m \leq \sqrt{2} \text{ のとき} & -\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} \leq m \text{ のとき} & \frac{1}{2} - m\sqrt{2} \end{cases}$

■