

平成 15 年度 東京工業大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・生命理工 数 I・II・III・A・B・C 平成 15 年 2 月 25 日

問題 1 2 3 4

- 1 (1) 3 次関数 $y = -x^3 + ax^2 + bx$ ($a > 0$) のグラフを C とする. 原点を通る直線で, C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ.
- (2) (1) で求めた直線のうち, 傾きの大きい方を l_1 , 小さい方を l_2 とする. C と l_1 が囲む部分の面積を S_1 , C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく. この二つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ.
- 2 2 辺の長さの比が $1 : a$ ($a > 1$) の長方形がある. この長方形から 1 本の線分によって切ることにより正方形を取り去る. 残った図形が正方形でなければ, 再び同じ要領で正方形を取り去り, 残りが正方形でない限りこの操作を続ける. 例えば, $a = 3$, $a = \frac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる.
- (1) 3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ.
- (2) n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ.
- 3 $\triangle ABC$ において, 辺 AB の中点を M , 辺 AC の中点を N とする. 辺 AB を $x : 1 - x$ ($0 \leq x < 1$) の比に内分する点 P と, 辺 AC を $y : 1 - y$ ($0 \leq y < 1$) の比に内分する点 Q をとり, 線分 BQ と線分 CP の交点を R とする. このとき, R が $\triangle AMN$ に含まれるような (x, y) 全体を xy 平面に図示し, その面積を求めよ. (ただし, 辺 AB , 辺 AC を $0 : 1$ の比に内分する点とは, ともに点 A のこととする.)
- 4 関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) を次の漸化式により定める.

$$f_1(x) = x^2, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$$

ただし, $f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す.

- (1) $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式であることを示し, x^{n+1} の係数を求めよ.
- (2) $f_n^{(1)}(0)$, $f_n^{(2)}(0)$, $f_n^{(3)}(0)$, $f_n^{(4)}(0)$ を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ とおくと ($a > 0$)

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$C : y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線は

$$y - f(t) = f'(t)(x - t)$$

これが原点 O を通るから $-f(t) + tf'(t) = 0$

$$-(-t^3 + at^2 + bt) + t(-3t^2 + 2at + b) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2(2t - a) = 0$$

接点の x 座標は $x = 0, \frac{a}{2}$ 接線の傾きは $f'(0) = b, f'\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + b$

よって, 求める接線の方程式は $y = bx, y = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)x$

- (2) $a > 0, f'\left(\frac{a}{2}\right) > f'(0)$ より $l_1 : y = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)x, l_2 : y = bx$

C と l_2 を連立すると $-x^3 + ax^2 + bx = bx$

$$x^2(x - a) = 0 \quad \text{共有点の } x \text{ 座標は } x = 0, a$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\frac{a}{2}} \left\{ \left(\frac{a^2}{4} + b \right) x - (-x^3 + ax^2 + bx) \right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} x \left(\frac{a}{2} - x \right)^2 dx = \frac{1!2!}{4!} \left(\frac{a}{2} - 0 \right)^4 = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{2} \right)^4, \end{aligned}$$

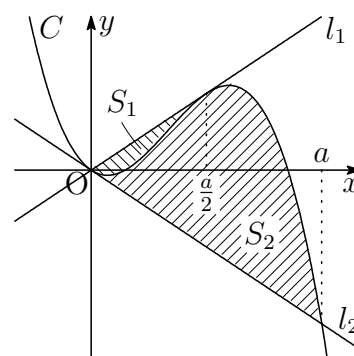
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^a \{ (-x^3 + ax^2 + bx) - bx \} dx \\ &= \int_0^a x^2(a - x) dx = \frac{2!1!}{4!} (a - 0)^4 = \frac{1}{12} a^4 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad S_1 : S_2 = \left(\frac{a}{2} \right)^4 : a^4 = 1 : 16$$

補足 次の公式¹を利用している.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

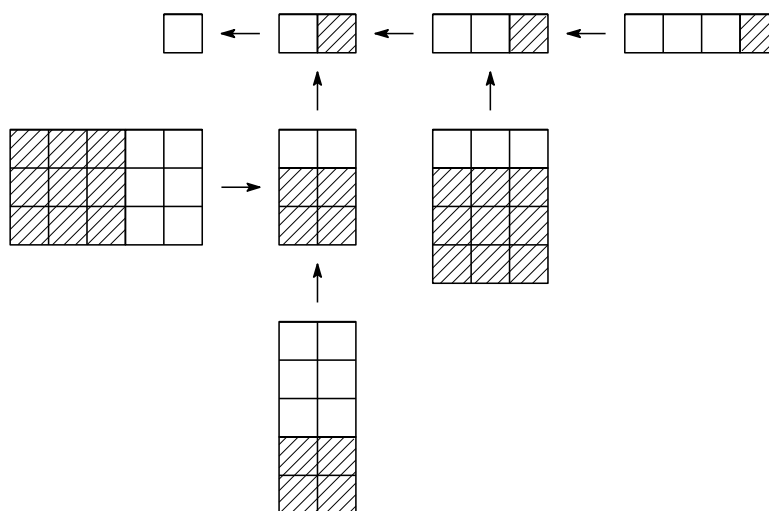
¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf の [1] を参照.



- 2** (1) 下の図から，3回でこの操作が終わる長方形の辺の比は次の4通り．

$$4:1, \quad 3:4, \quad 2:5, \quad 5:3$$

よって，求める a の値は $a = 4, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}$



補足 n 回の操作で終わる個数は 2^{n-1} ．上の矢印を逆に辿ると分かりやすい．

- (2) n 回の操作で終わる a の値の集合を A_n とすると $A_1 = \{2\}$

$$a \in A_n \implies a+1 \in A_{n+1}, \quad \frac{1}{a} + 1 \in A_{n+1}$$

A_n の最大の要素を a_n とすると， $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + 1$ より

$$a_n = 2 + 1(n-1) = n+1$$

A_n の最小の要素を b_n とすると， $b_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

$$b_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

n 回の操作で終わるような a の値の最大値は $n+1$ ，最小値は $\frac{n+1}{n}$ ■

- 3** $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ のとき, $\triangle ABQ$ と直線 CP についてメネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{QC}{CA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{1-x} \cdot \frac{BR}{RQ} \cdot \frac{1-y}{1} = 1$$

$BR : RQ = 1 - x : x(1 - y)$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{x(1-y)\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AQ}}{1-x+x(1-y)} = \frac{x(1-y)\overrightarrow{AB} + (1-x)y\overrightarrow{AC}}{1-xy} \quad (*)$$

(*) は, $xy = 0$ のときも成立するから, (*) は $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ について成立する. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN}$ であるから

$$\overrightarrow{AR} = \frac{2x(1-y)}{1-xy}\overrightarrow{AM} + \frac{2y(1-x)}{1-xy}\overrightarrow{AN}$$

R が $\triangle AMN$ に含まれるとき, 次を満たせばよい.

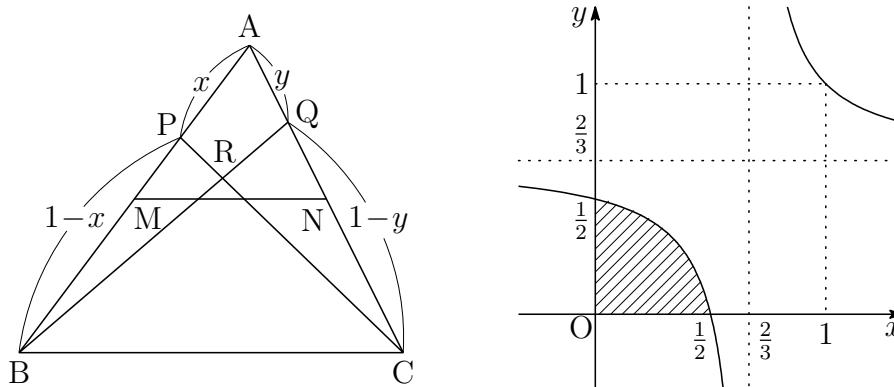
$$\frac{2x(1-y)}{1-xy} \geq 0, \quad \frac{2y(1-x)}{1-xy} \geq 0, \quad \frac{2x(1-y)}{1-xy} + \frac{2y(1-x)}{1-xy} \leq 1$$

$0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ より, 上の第 1 式と第 2 式は満たすから, 第 3 式より

$$2x(1-y) + 2y(1-x) \leq 1-xy \quad \text{すなわち} \quad (3x-2)(3y-2) \geq 1$$

(x, y) の満たす条件は $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$, $(3x-2)(3y-2) \geq 1$

よって, その満たす領域は, 右下の図の斜線部分で境界線を含む.



$$\text{その面積は} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9x-6} \right) dx = \left[\frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \log |9x-6| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} \log 2$$

■

4 (1) 「 $f_n(x)$ は $(n+1)$ 次多項式である」を (A) とする.

[1] $n = 1$ のとき, $f_1(x) = x^2$ より, (A) が成立する.

[2] $n = k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると, $f_k^{(2)}(x)$ の次数は

$$(k+1) - 2 = k - 1$$

$$x^3 f_k^{(2)} \text{ の次数は } (k-1) + 3 = k + 2$$

$f_k(x) + x^3 f_k^{(2)}(x)$ は, $(k+1)$ 次式と $(k+2)$ 次式の和であるから

$$f_{k+1}(x) = f_k(x) + x^3 f_k^{(2)}(x)$$

は $(k+2)$ 次式で, $n = k+1$ のときも (A) は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (A) は成立する.

$f_n(x)$ の $n+1$ 次の項の係数を A_n とすると, 漸化式より

$$\begin{cases} A_1 x^2 = x^2 \\ A_{n+1} x^{n+2} = x^3 (A_n x^{n+1})^{(2)} \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_{n+1} = (n+1)nA_n \end{cases}$$

$$n > 1 \text{ のとき, } (*) \text{ より } \prod_{k=1}^{n-1} \frac{A_{k+1}}{A_k} = \prod_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

$$\frac{A_n}{A_1} = \prod_{k=1}^{n-1} k \prod_{k=1}^{n-1} (k+1) = (n-1)!n!$$

$$A_n = A_1(n-1)!n! = (n-1)!n!$$

上の結果は, $n = 1$ のときも成立するから, 求める x^{n+1} の係数は

$$(n-1)!n!$$

(2) 漸化式より, $f_n(x)$ の最低次の項は x^2 であるから

$$f_n(x) = x^2 + a_n x^3 + b_n x^4 + \cdots$$

とおくと, 与えられた漸化式 $f_{n+1}(x) = f_n(x) + x^3 f_n^{(2)}(x)$ より

$$\begin{aligned} x^2 + a_{n+1} x^3 + b_{n+1} x^4 + \cdots &= x^2 + a_n x^3 + b_n x^4 + \cdots \\ &\quad + x^3 (x^2 + a_n x^3 + b_n x^4 + \cdots)^{(2)} \\ &= x^2 + (a_n + 2)x^3 + (b_n + 6a_n)x^4 + \cdots \end{aligned}$$

同じ次数の項の係数を比較すると

$$a_{n+1} = a_n + 2, \quad b_{n+1} = b_n + 6a_n \quad (**)$$

(**) の第 1 式および $a_1 = 0$ から, $\{a_n\}$ は初項 0, 公差 2 の等差数列.

$$a_n = 0 + 2(n-1) = 2(n-1)$$

これと (**) の第 2 式から $b_{n+1} - b_n = 6 \cdot 2(n-1)$

$$n > 1 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = 6 \sum_{k=1}^{n-1} 2(k-1)$$

$$b_n - b_1 = 6 \sum_{k=1}^{n-1} \{k(k-1) - (k-1)(k-2)\}$$

$$b_1 = 0 \text{ であるから } b_n = 6(n-1)(n-2)$$

上式は, $n = 1$ のときも成立する. 以上の結果から

$$f_n(x) = x^2 + 2(n-1)x^3 + 6(n-1)(n-2)x^4 + \cdots$$

したがって

$$f_n^{(1)}(0) = \mathbf{0},$$

$$f_n^{(2)}(0) = (x^2)^{(2)} = \mathbf{2},$$

$$f_n^{(3)}(0) = \{2(n-1)x^3\}^{(3)} = \mathbf{12(n-1)},$$

$$f_n^{(4)}(0) = \{6(n-1)(n-2)x^4\}^{(4)} = \mathbf{144(n-1)(n-2)}$$

