

平成14年度 東京工業大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成14年2月25日

問題 1 2 3 4

1 実数 a に対し, 積分

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin x - a \cos x| dx$$

を考える. $f(a)$ の最小値を求めよ.

2 楕円 $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ の外部の点 $P(a, b)$ からひいた2本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ.

3 空間内にある一辺の長さが1の正三角形 ABC で, A の座標が $(0, 0, 1)$ であり, B と C の z 座標が等しいものを考える. 点 $L(0, 0, 1 + \sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの正三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ.

4 n を自然数とする.

(1) 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

(2) 関数 $y = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする. このとき

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2-x_n} + \cdots + \frac{1}{n-x_n}$$

および $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$ を示せ.

(3) (2) の x_n に対して, 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \log n$$

を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad a = \tan \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とすると } \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\sin x - a \cos x = \sqrt{1+a^2} \sin(x-\theta)$$

(i) $a < 0$, すなわち, $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin(x-\theta)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x-\theta) dx \\ &= \left[-\cos(x-\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) + \cos \theta \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad f(a) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

(ii) $0 \leq a \leq 1$, すなわち, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin(x-\theta)| dx \\ &= -\int_0^{\theta} \sin(x-\theta) dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x-\theta) dx \\ &= \left[\cos(x-\theta) \right]_0^{\theta} - \left[\cos(x-\theta) \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\cos \theta + 2 - \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos \theta + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad f(a) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{1+a^2} - \frac{a}{\sqrt{2}}$$

(iii) $1 < a$, すなわち, $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{f(a)}{\sqrt{1+a^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin(x-\theta)| dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x-\theta) dx$$

$$(i) \text{ の結果を利用して } \quad f(a) = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}}$$

(i) の結果より, $a < 0$ で単調減少, (iii) の結果より, $1 < a$ で単調増加.
 开区間における単調増加・単調減少する関数は最大値・最小値をとらない.
 (ii) の結果より, $0 \leq a \leq 1$ において

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}a - \sqrt{1+a^2}}{\sqrt{2}(1+a^2)} \\
 &= \frac{(2\sqrt{2}a)^2 - (1+a^2)}{\sqrt{2}(1+a^2)(2\sqrt{2}a + \sqrt{1+a^2})} \\
 &= \frac{7a^2 - 1}{\sqrt{2}(1+a^2)(2\sqrt{2}a + \sqrt{1+a^2})}
 \end{aligned}$$

a	0	...	$\frac{1}{\sqrt{7}}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める最小値は $f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$ ■

2 点 $P(a, b)$ から楕円 C に接する直線を $\ell: y = m(x - a) + b$ とおき, C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{17} + \frac{1}{8}\{mx + (b - ma)\}^2 = 1$$

x について整理すると

$$\left(m^2 + \frac{8}{17}\right)x^2 + 2m(b - ma)x + (b - ma)^2 - 8 = 0 \quad (*)$$

このとき, 2 次方程式 (*) は重解をもつから, 係数について

$$D/4 = m^2(b - ma)^2 - \left(m^2 + \frac{8}{17}\right)\{(b - ma)^2 - 8\} = 0$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{8}{17}(b - ma)^2 + 8m^2 + \frac{64}{17} = 0$$

$$m \text{ について整理すると } (a^2 - 17)m^2 - 2abm + b^2 - 8 = 0 \quad \cdots (**)$$

$a^2 - 17 \neq 0$ のとき, 2 次方程式 (**) の 2 解 m_1, m_2 について, その 2 本の接線が直交するから, 解と係数の関係により

$$m_1 m_2 = \frac{b^2 - 8}{a^2 - 17} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = 25$$

$a^2 - 17 = 0$, すなわち, $(\pm\sqrt{17}, \pm\sqrt{8})$ (複号任意) から楕円 $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$ にひいた 2 本の接線も直交するから, 求める点 P の軌跡の方程式は $x^2 + y^2 = 25$

補足 点 $P(a, b)$ から楕円 $C: \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ に接する直線を $\ell: y = m(x - a) + b$ とおき, C と ℓ の方程式から y を消去すると

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{1}{q^2}\{mx + (b - ma)\}^2 = 1$$

x について整理すると

$$\left(m^2 + \frac{q^2}{p^2}\right)x^2 + 2m(b - ma)x + (b - ma)^2 - q^2 = 0 \quad (*)$$

このとき, 2 次方程式 $(*)$ は重解をもつから, 係数について

$$D/4 = m^2(b - ma)^2 - \left(m^2 + \frac{q^2}{p^2}\right)\{(b - ma)^2 - q^2\} = 0$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{q^2}{p^2}(b - ma)^2 + q^2m^2 + \frac{q^4}{p^2} = 0$$

m について整理すると $(a^2 - p^2)m^2 - 2abm + b^2 - q^2 = 0 \quad \cdots (**)$

$a^2 - p^2 \neq 0$ のとき, 2 次方程式 $(**)$ の 2 解 m_1, m_2 について, その 2 本の接線が直交するから, 解と係数の関係により

$$m_1m_2 = \frac{b^2 - q^2}{a^2 - p^2} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = p^2 + q^2$$

$a^2 - p^2 = 0$, すなわち, $(\pm p, \pm q)$ (複号任意) から楕円 $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ にひいた 2 本の接線も直交する. よって, 点 P の軌跡の方程式は

$$x^2 + y^2 = p^2 + q^2$$

楕円 $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$ の直交する 2 本の接線の交点の軌跡である円 $x^2 + y^2 = p^2 + q^2$ を楕円 $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1$ の準円という. ■

$$f(\theta) = (2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^{-2}\sin\theta \text{ とおくと } (0 < \theta < \pi)$$

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -2\sqrt{3}(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^{-3}\sin^2\theta + (2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^{-2}\cos\theta \\ &= \frac{-2\sqrt{3}\sin^2\theta + (2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)\cos\theta}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{3}}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^3} = \frac{(\cos\theta + \sqrt{6})(\sqrt{3}\cos\theta - \sqrt{2})}{(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\cos\theta)^3} \end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ とおくと } (0 < \varphi < \pi) \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

θ	(0)	$\cdots$	φ	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		+	0	-	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\searrow$	

上の結果と(*)により, 求める最大値は

$$\sqrt{3}(3 + 2\sqrt{2}) \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}$$

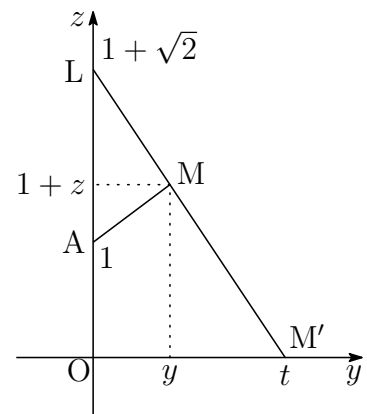
解説 M(0, y, 1+z), B $\left(\frac{1}{2}, y, 1+z\right)$ とおくと ($y > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{LM'}{LM} &= \frac{t}{y} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - z}, \\ AB^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$OM' = t, \quad B'C' = \frac{t}{y}BC = \frac{t}{y} \text{ より}$$

$$\triangle OB'C' = \frac{1}{2}OM' \cdot B'C' = \frac{t^2}{2y}$$

$$t = \frac{(1 + \sqrt{2})y}{\sqrt{2} - z} \text{ より } \triangle OB'C' = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{y}{(\sqrt{2} - z)^2} \quad \cdots \textcircled{2}$$



①, ② より, $y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ ($y > 0$) における $\frac{y}{(\sqrt{2}-z)^2}$ の最大値を求めればよい.

$\vec{p} = (y, z)$ を θ を媒介変数とする正則曲線を考え,

$$\vec{v} = (y', z') = \left(\frac{dy}{d\theta}, \frac{dz}{d\theta} \right)$$

をその接ベクトルとする. $y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ を θ で微分すると

$$2yy' + 2zz' = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{p} \cdot \vec{v} = 0$$

関数 $g(\theta) = \frac{y}{(\sqrt{2}-z)^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \frac{y'}{(\sqrt{2}-z)^2} + \frac{2yz'}{(\sqrt{2}-z)^3} = \frac{1}{(\sqrt{2}-z)^3} (\sqrt{2}-z, 2y) \cdot (y', z') \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2}-z)^3} (\sqrt{2}-z, 2y) \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (*)$$

$\vec{q} = (\sqrt{2}-z, 2y)$ とすると, $g(\theta)$ が極値をとるとき

$$\vec{q} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{p} // \vec{q}$$

$\vec{p} = (y, z)$, $\vec{q} = (\sqrt{2}-z, 2y)$ より $2y^2 - z(\sqrt{2}-z) = 0$

$$z^2 + \sqrt{2}z - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \left(z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$y^2 + z^2 = \frac{3}{4}$ に注意して $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $y > 0$ より $y = \frac{1}{2}$

このとき, $g(\theta)$ は極値 1 をとるが, これが極大値であることを以下に示す.

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$) とし, 次を満たす φ をとる.

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \quad \text{すなわち} \quad \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

(*) より $(\sqrt{2}-z)^3 g'(\theta) = (\sqrt{2}-z)y' + 2yz' = \frac{\sqrt{6}}{2} \cos \theta - \frac{3}{4} \cos^2 \theta - \frac{3}{2} \sin^2 \theta$

これを θ で微分すると

$$\{(\sqrt{2}-z)^3\}' g'(\theta) + (\sqrt{2}-z)^3 g''(\theta) = -\frac{\sqrt{6}}{2} \sin \theta - \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$g'(\varphi) = 0$ および上式の右辺は負より, $g''(\varphi) < 0$ となり, $g(\varphi)$ は極大値. ■

4 (1) k を自然数とすると
$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

$$\frac{1}{k+1} < \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k}$$

自然数 $n > 1$ について

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \{\log(k+1) - \log k\} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ とおくと } S_n - 1 < \log n < S_n - \frac{1}{n}$$

$$(*) \log n + \frac{1}{n} < S_n < \log n + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + \frac{1}{n \log n} < \frac{S_n}{\log n} < 1 + \frac{1}{\log n}$$

$$\text{このとき} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\log n}\right) = 1$$

したがって、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\log n} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 1$$

(2) $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ とおくと

$$f(k) = f(k+1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

したがって、ロルの定理により

$$f'(x_{n-k}) = 0, \quad k < x_{n-k} < k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

を満たす x_{n-k} が存在する. $f'(x)$ は n 次多項式であるから, x_{n-k} は $f'(x) = 0$ の解であり, $f(x)$ の極値を与える x である.

また, x_n ($0 < x_n < 1$) は, $f(x)$ の極値を与える x の最小値である.

$x \neq k$ のとき ($k = 0, 1, 2, \dots, n$)

$$f'(x) = f(x) \sum_{k=0}^n \frac{1}{x-k}$$

$f'(x_n) = 0$, $f(x_n) \neq 0$ であるから

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{x_n - k} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - x_n}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{2 - x_n} + \cdots + \frac{1}{n - x_n} \quad \cdots (**)$$

$$0 < x_n < 1 \text{ であるから, } (**) \text{ より } \frac{1}{x_n} > \frac{1}{1-x_n}$$

$$0 < x_n < 1 - x_n \quad \text{ゆえに} \quad 0 < x_n < \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad 0 < x_n \leq \frac{1}{2}$$

(3) $0 < x_n < \frac{1}{2}$ より, $n > 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_n} &> \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n, \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_n} &= \frac{1}{1-x_n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-x_n} \\ &< 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = 2 + S_n - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-x_n} \text{ であるから } S_n < \frac{1}{x_n} < 2 + S_n - \frac{1}{n} < 2 + S_n$$

$$(*) \text{ より } \log n + \frac{1}{n} < \frac{1}{x_n} < 2 + (\log n + 1)$$

$$1 + \frac{1}{n \log n} < \frac{1}{x_n \log n} < 1 + \frac{3}{\log n}$$

$$\text{このとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n \log n}\right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{\log n}\right) = 1$$

したがって, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n \log n} = 1 \quad \text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \log n = 1$$

補足 (*) の不等式

$$\log n + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n + 1$$

に関連して, 次の等式が知られている.

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right)$$

をオイラーの定数 (Euler's constant) $\gamma \doteq 0.577215665 \dots$ という¹. ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2003.pdf> (p.17)