

平成13年度 東京工業大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理・工・生命理工 数I・II・III・A・B・C 平成13年2月25日

問題 1 2 3 4

1 $a > 0, t > 0$ に対して定積分

$$S(a, t) = \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx$$

を考える.

(1) a を固定したとき, t の関数 $S(a, t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ.

(2) $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ.

2 xyz 空間内の動点 P を考える. P は $z \leq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで, $z > 0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする. P がはじめに原点 $(0, 0, 0)$ にあるとき, その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ. ただし, $a > 1$ とする.

3 箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている. この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う. このとき, はじめから j 回目 ($j = 1, \dots, k$) までに取り出したカードの番号の和を X_j とし, $X_1, \dots, X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする.

(1) $N \geq 3$ のとき $P_N(1), P_N(2), P_N(3)$ を N で表せ.

(2) $P_3(4), P_3(5)$ を求めよ.

(3) $k \leq N$ のとき, $P_N(k)$ を N と k で表せ.

4 一辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする. P が線対称な五角形になるように折るとき, P の面積の最小値を求めよ.

解答例

- 1** (1) (i) $1 < \frac{1}{t}$, すなわち, $0 < t < 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx = \int_0^a \left(\frac{1}{t} - e^{-x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{t} + e^{-x} \right]_0^a = \frac{a}{t} + e^{-a} - 1 \end{aligned}$$

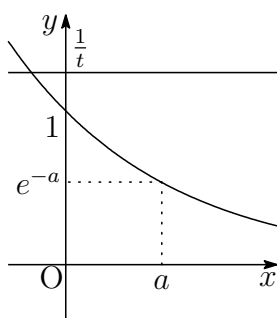
- (ii) $e^{-a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$, すなわち, $1 \leq t \leq e^a$ のとき

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx \\ &= \int_0^{\log t} \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx + \int_{\log t}^a \left(\frac{1}{t} - e^{-x} \right) dx \\ &= \left[-e^{-x} - \frac{x}{t} \right]_0^{\log t} + \left[\frac{x}{t} + e^{-x} \right]_{\log t}^a \\ &= -\frac{2(1 + \log t)}{t} + 1 + \frac{a}{t} + e^{-a} \end{aligned}$$

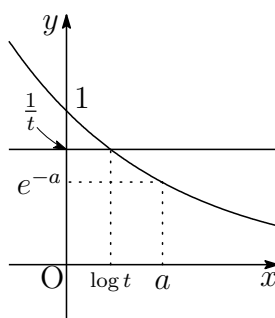
- (iii) $\frac{1}{t} < e^{-a}$, すなわち, $e^a < t$ のとき

$$\begin{aligned} S(a, t) &= \int_0^a \left| e^{-x} - \frac{1}{t} \right| dx = \int_0^a \left(e^{-x} - \frac{1}{t} \right) dx \\ &= \left[-e^{-x} - \frac{x}{t} \right]_0^a = -e^{-a} + 1 - \frac{a}{t} \end{aligned}$$

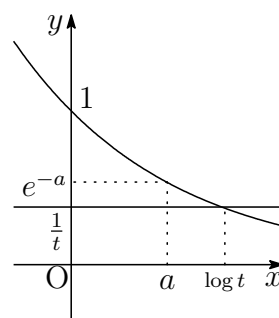
- (i) $1 < \frac{1}{t}$



- (ii) $e^{-a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$



- (iii) $\frac{1}{t} < e^{-a}$



(i), (iii)において, t の関数 $S(a, t)$ は, それぞれ単調減少, 単調増加であり, これらの開区間では最小値をとらない.

(ii) において $\frac{d}{dt}S(a, t) = \frac{2 \log t - a}{t^2}$

t	1	$\dots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\dots$	e^a
$\frac{d}{dt}S(a, t)$		$-$	0	$+$	
$S(a, t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

(i)~(iii) より, 求める最小値 $m(a)$ は

$$m(a) = S(a, e^{\frac{a}{2}}) = e^{-a} - 2e^{-\frac{a}{2}} + 1 = \left(e^{-\frac{a}{2}} - 1\right)^2$$

(2) (1) の結果から $\frac{m(a)}{a^2} = \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2$

$$f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \text{ とすると } f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(0)}{a} = f'(0) = -\frac{1}{2}$$

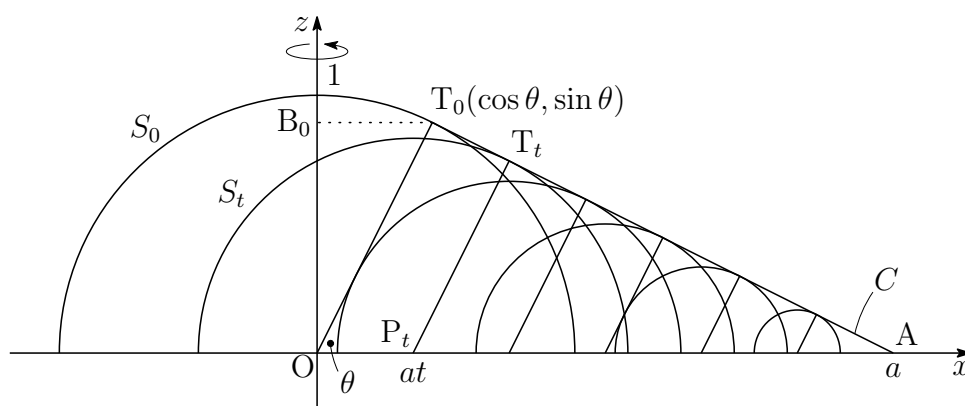
よって $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{m(a)}{a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{a}{2}} - 1}{a}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$



- 2 x 軸上を移動する動点 $P_t(at, 0, 0)$ をとると, P_t から $z > 0$ の領域に到達できる境界は, P_t を中心とする半径 $1-t$ の半球面で, これを S_t とする. とくに原点 O を中心とする半径 1 の半球面を S_0 とする. 点 $A(a, 0, 0)$ を頂点とする円錐面で S_t に接するものを C とし, C と S_t の接点で zx 平面上の点を T_t とする. とくに C と S_0 の接点で zx 平面上の点を $T_0(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ とおくと

$$\cos \theta = \frac{1}{a}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$$

補足 物理で扱うホイヘンスの原理をイメージすればよい. $\left(\frac{P_t T_t}{P_t A} = \text{一定} \right)$



$z > 0$ の体積は, 上の図の $\triangle OAT_0$ および S_0 で囲まれた領域を z 軸の回りに 1 回転させたものである. $z \leq 0$ の体積は, 半径 a の半球の体積である.

求める体積を V とすると (球の一部と円錐台と半球)

$$V = \pi \int_{\sin \theta}^1 (1 - z^2) dz + \frac{\pi}{3} (a^2 + a \cos \theta + \cos^2 \theta) \sin \theta + \frac{2}{3} \pi a^3$$

このとき

$$\pi \int_{\sin \theta}^1 (1 - z^2) dz = \pi \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{\sin \theta}^1 = \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi}{3} (\sin^2 \theta - 3) \sin \theta$$

したがって

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi}{3} (a^2 + a \cos \theta - 2) \sin \theta + \frac{2}{3} \pi a^3 \\ &= \frac{2}{3} \pi + \frac{\pi}{3} \left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} - 2 \right) \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} + \frac{2}{3} \pi a^3 \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ 2 + \frac{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{a} + 2a^3 \right\} \end{aligned}$$

別解 $z > 0$ のとき S_0 を原点 O を極とする極方程式 $r = 1$ の $\varphi = \theta$ から $\varphi = \frac{\pi}{2}$ までの回転体の体積を V_1 とすると ¹

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi \left[\sin \varphi \right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\pi(1 - \sin \theta)$$

$\triangle OAT_0$ の面積は $\frac{1}{2}a \sin \theta$ で、その重心の x 座標が $\frac{1}{3}(a + \cos \theta)$ であるから、 $\triangle OAT_0$ を z 軸の回りに回転させ立体の体積を V_2 とすると、パップス・ギュルダンの定理により ²

$$V_2 = 2\pi \cdot \frac{1}{3}(a + \cos \theta) \cdot \frac{1}{2}a \sin \theta = \frac{\pi}{3} \sin \theta (a^2 + a \cos \theta)$$

$z \leq 0$ の体積は、半径 a の半球の体積

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3$$

求める体積は、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$, $\cos \theta = \frac{1}{a}$ より

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= \frac{2}{3}\pi(1 - \sin \theta) + \frac{\pi}{3} \sin \theta (a^2 + a \cos \theta) + \frac{2}{3}\pi a^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} \sin \theta (a^2 + a \cos \theta - 2) + \frac{2}{3}\pi a^3 \\ &= \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{3} \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} - 2 \right) + \frac{2}{3}\pi a^3 \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ 2 + \frac{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{a} + 2a^3 \right\} \end{aligned}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf (p.12 を参照)

²http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf (p.6 を参照)

- 3** (1) $P_N(1)$ は, $X_1 = 1$ となる確率であるから

$$P_N(1) = \frac{1}{N}$$

$P_N(2)$ は, $X_1 = 2, X_2 = 1 + 1$ となる確率であるから

$$P_N(2) = \frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^2 = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$P_N(3)$ は, $X_1 = 3, X_2 = 1 + 2, X_3 = 1 + 1 + 1$ となる確率であるから

$$P_N(3) = \frac{1}{N} + 2 \left(\frac{1}{N}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\right)^3 = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^2$$

- (2) $P_3(4)$ は, $X_2 = 1 + 3 = 2 + 2, X_3 = 1 + 1 + 2, X_4 = 1 + 1 + 1 + 1$ となる確率であるから

$$P_3(4) = (2 + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{37}{81}$$

$P_3(5)$ は, $X_2 = 2 + 3, X_3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2, X_4 = 1 + 1 + 1 + 2, X_5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ となる確率であるから

$$P_3(5) = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + (3 + 3) \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{121}{243}$$

- (3) k 個の○の間に $k - 1$ 個の仕切り「|」を一行に並べ

$$\bigcirc | \bigcirc | \bigcirc | \cdots | \bigcirc$$

$k - 1$ 個の仕切りから $j - 1$ 個 ($j = 1, 2, \dots, k$) を選ぶことにより, k 個の○が j 個に区分され, 左から順にその個数を $x_1, x_2, \dots, x_j$ とし,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_j = k$$

とすると, $P_N(k)$ は

$$\begin{aligned} P_N(k) &= \sum_{j=1}^k {}_{k-1}C_{j-1} \left(\frac{1}{N}\right)^j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{k-1} {}_{k-1}C_j \left(\frac{1}{N}\right)^j \\ &= \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

補足 (3) の結果は (1) の結果と一致している.

別解 $P_N(k)$ は, 1 回目に k が出て 1 回目で終了する確率 $\frac{1}{N}$ と, 1 回目に j がでて ($j = 1, 2, \dots, k-1$)、2 回目以降の和が $k-j$ である確率の和であるから

$$P_N(k) = \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{N} P_N(k-j)$$

上式の k を $k-1$ に置き換えると

$$P_N(k-1) = \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{1}{N} P_N(k-1-j)$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと (先頭の $\frac{1}{N}$ は相殺されて)

$$\begin{aligned} P_N(k) - P_N(k-1) &= \frac{1}{N} P_N(k-1) \\ P_N(k) &= \left(1 + \frac{1}{N}\right) P_N(k-1) \end{aligned}$$

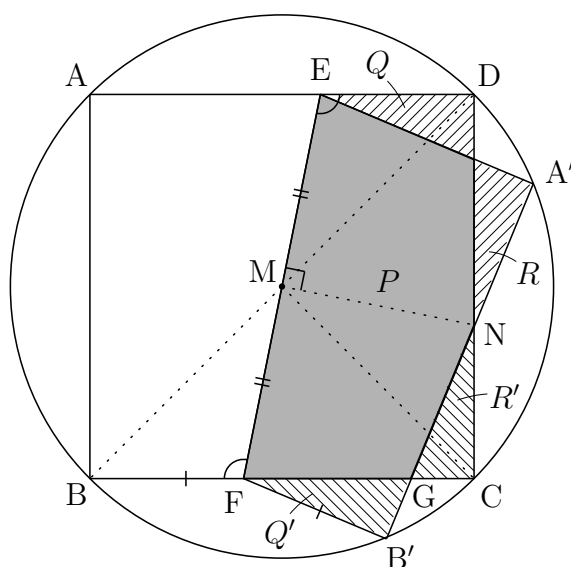
$P_N(1) = \frac{1}{N}$ であるから, 上の漸化式より

$$P_N(k) = \frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^{k-1}$$



4 一辺の長さが1の正方形ABCDを線分EFに沿って折り曲げたとき、EFの中点をMとすると、順次、以下の結論が得られる。

- [1] 五角形Pが線分MNに関して対称であるとき、下の図の斜線部の三角形QとQ', RとR'はそれぞれ合同である(一辺と両端の角)。
- [2] $DE = B'F = BF$ より, $\triangle DEM \equiv \triangle BFM$ 。
- [3] Mは四角形ABCDの中心であり, 2点A', B'は四角形ABCDの外接円の周上の点である。
- [4] $\triangle DEM$ をMを中心に時計回りに 90° 回転させたものが $\triangle CNM$ であるから, $DE = CN$ が成立し, QとR'は合同である(一辺と両端の角)。
- [5] [1] と [4] の結論から, 4つの三角形Q, Q', R, R'は合同である。



$FC = x$, $CG = y$ とおくと, $FG = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり, $BC = 1$ より

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - x - y$$

上の第2式の両辺を平方して整理すると

$$xy = x + y - \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y = 1 - \frac{1}{2(1-x)}$$

四角形CDEFの面積が $\frac{1}{2}$ であるから, Pの面積をSとすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} xy = 1 - x - y = \frac{1}{2(1-x)} - x \\ &= \frac{1}{2(1-x)} + (1-x) - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{2(1-x)} \cdot (1-x)} - 1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

よって, Pの面積の最小値は $\sqrt{2} - 1$

