

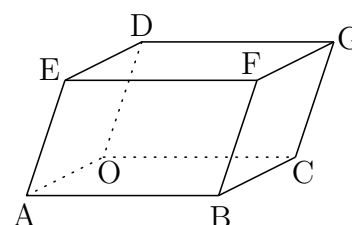
平成 26 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理系 (理, 医 (医・保健 (放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 $x = t + \frac{1}{3t} \left(0 < t \leq \frac{1}{2} \right)$ とする.

- (1) x のとり得る値の範囲を求めよ.
- (2) x の方程式 $x^2 + ax + b = 0$ が (1) の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 (a, b) の存在範囲を図示せよ.

- 2 右図のような平行六面体 OABC-DEFG が xyz 空間内にあり, $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(-1, 0, \sqrt{6})$ とする. 辺 AB の中点を M とし, 辺 DG 上の点 N を $MN = 4$ かつ $DN < GN$ を満たすように定める.



- (1) N の座標を求めよ.
- (2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ.
- (3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC-DEFG の切り口の面積を求めよ.

- 3 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある.

- (1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す. 書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ.
- (2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す. 書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ.
- (3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す. 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ.

- 4 不等式 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ が表す xy 平面内の領域を D とする. P を円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点, Q と R を円 $x^2 + y^2 = 4$ 上の異なる 2 点とし, 三角形 PQR は領域 D に含まれているとする. a, b を実数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により P は P', Q は Q', R は R' に移されるとする. このとき, 三角形 P'Q'R' が領域 D に含まれるための a, b の必要十分条件を求めよ. ただし, 三角形は内部も含めて考えるものとする.

5 整数 n に対して, $I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x} dx$ とする.

- (1) I_0 を求めよ.
- (2) n を正の整数とするとき, $I_n - I_{n-1}$ を求めよ.
- (3) I_5 を求めよ.

6 以下の問いに答えよ.

- (1) n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$$

とおく. $x > 0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ. ただし, 対数は自然対数とする.

- (2) n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

解答例

1 (1) $x = t + \frac{1}{3t} \left(0 < t \leq \frac{1}{2} \right)$ より

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{3t^2} = \frac{1}{t^2} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) < 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} x = \infty$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		—	
x		$\searrow$	$\frac{7}{6}$

よって $x \geq \frac{7}{6}$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ とおくと $f(x) = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$

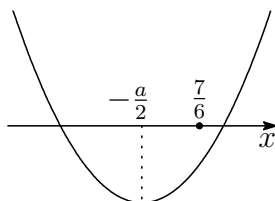
(i) $-\frac{a}{2} \leq \frac{7}{6}$, すなわち, $a \geq -\frac{7}{3}$ のとき

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + a \cdot \frac{7}{6} + b \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq -\frac{7}{6}a - \frac{49}{36}$$

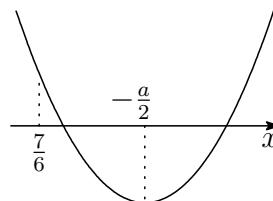
(ii) $\frac{7}{6} \leq -\frac{a}{2}$, すなわち, $a \leq -\frac{7}{3}$ のとき

$$-\frac{a^2}{4} + b \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad b \leq \frac{a^2}{4}$$

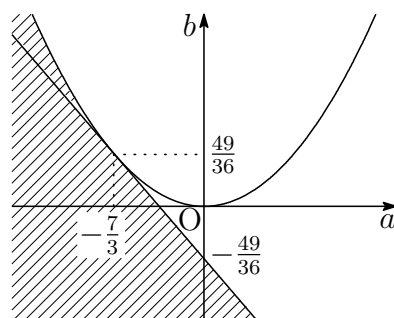
(i) $-\frac{a}{2} \leq \frac{7}{6}$ のとき



(ii) $\frac{7}{6} \leq -\frac{a}{2}$ のとき



(i), (ii) の結果から点 (a, b) の存在範囲は, 右の斜線部分で, 境界線を含む.



- 2 (1) $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$, $D(-1, 0, \sqrt{6})$
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とすると

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{c}| = 3, \quad |\vec{d}| = \sqrt{7}, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{d} = -2$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \overrightarrow{ON} = \vec{d} + t\vec{c} \text{ とおくと } \left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{MN} = -\vec{a} + \vec{d} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{c},$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{d}|^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 |\vec{c}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{d} \\ &= 4 + 7 + 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot (-2) = 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 15 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{MN}| = 4 \text{ より } 9\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 15 = 16 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{DN} < \text{GN} \text{ より, } 0 < t < \frac{1}{2} \text{ であるから } t = \frac{1}{6}$$

したがって, 求める N の座標は

$$\overrightarrow{ON} = \vec{d} + \frac{1}{6}\vec{c} = (-1, 0, \sqrt{6}) + \frac{1}{6}(0, 3, 0) = \left(-1, \frac{1}{2}, \sqrt{6}\right)$$

- (2) $\overrightarrow{OE} = \vec{a} + \vec{d}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. $\overrightarrow{ON} = \vec{d} + \frac{1}{6}\vec{c}$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}, \quad \overrightarrow{EN} = \frac{1}{6}\vec{c} - \vec{a}$$

P は平面 EMN 上の点であるから

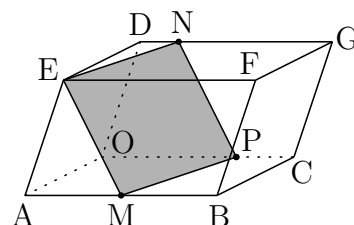
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OE} + \alpha \overrightarrow{EM} + \beta \overrightarrow{EN} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数}) \\ &= \vec{a} + \vec{d} + \alpha \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}\right) + \beta \left(\frac{1}{6}\vec{c} - \vec{a}\right) \\ &= (1 - \beta)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{6}\right)\vec{c} + (1 - \alpha)\vec{d} \end{aligned}$$

P は y 軸上の点であるから ($\vec{c}$ のスカラー倍)

$$1 - \beta = 0, \quad 1 - \alpha = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \beta = 1$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{OP} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{c} = \frac{2}{3}(0, 3, 0) = (0, 2, 0)$$

よって **P(0, 2, 0)**



- (3) (2) の結果から, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}$ ゆえに $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN}$ したがって, 四角形 EMNP は平行四辺形である.

$$\overrightarrow{EM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d} = \frac{1}{2}(0, 3, 0) - (-1, 0, \sqrt{6}) = \left(1, \frac{3}{2}, -\sqrt{6}\right)$$

$$\overrightarrow{EN} = \frac{1}{6}\vec{c} - \vec{a} = \frac{1}{6}(0, 3, 0) - (2, 0, 0) = \left(-2, \frac{1}{2}, 0\right)$$

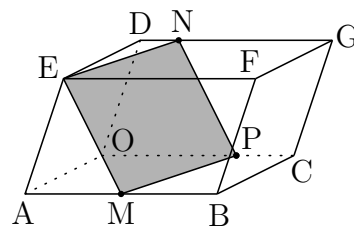
よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|\overrightarrow{EM}|^2 |\overrightarrow{EN}|^2 - (\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN})^2} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} + 6\right) \left(4 + \frac{1}{4}\right) - \left(-2 + \frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{37}{4} \cdot \frac{17}{4} - \left(-\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{151}}{2} \end{aligned}$$

補足 平面 EMPN を L とする. 平面 OABC と平面 DEFG は平行であるから, これらの 2 平面と L の交線 MP と EN は平行である.

また, 平面 ABFE と平面 OCGD は平行であるから, これらの 2 平面と L の交線 EM と NP は平行である.

よって, 四角形 EMPN は平行四辺形である.



3 10 個の数字が書かれた玉を次のように区別して考える.

$$\{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 3_a, 3_b, 4_a, 4_b, 5_a, 5_b\}$$

(1) 10 個の玉から 2 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_2 = 45$ (通り)

書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは, 2 と 5 を 1 個ずつ取り出す場合であるから $\boxed{\{2_x, 5_y\} \quad x = a, b \quad y = a, b}$

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{4}{45}$

(2) 10 個の玉から 4 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_4 = 210$ (通り)

書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは, $\{1, 4, 5, 5\}, \{2, 2, 5, 5\}$ の組合せであるから $\boxed{\{1_x, 4_y, 5_a, 5_b\}, \{2_a, 2_b, 5_a, 5_b\} \quad x = a, b \quad y = a, b}$

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

(3) 10 個の玉から 6 個の玉を順序を付けて取り出す場合の総数は

$${}_{10}P_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ (通り)}$$

(i) 前半 3 個と後半 3 個に書かれている数字が同じ 3 種類の数字のとき
前半 3 個が ${}_5P_3 \cdot 2^3$ 通りで後半 3 個が $3!$ 通りであるから

$${}_5P_3 \cdot 2^3 \times 3! = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

(ii) 前半 3 個と後半 3 個の組合せが $\{1, 3, 4\}$ と $\{2, 2, 3\}$ のとき

$$\boxed{\{1_x, 3_\alpha, 4_y\}, \{2_a, 2_b, 3_\beta\} \quad x = a, b \quad y = a, b, \quad (\alpha, \beta) = (a, b), (b, a)}$$

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

(iii) 前半 3 個と後半 3 個の組合せが $\{1, 4, 5\}$ と $\{2, 2, 5\}$ のとき

$$\boxed{\{1_x, 4_y, 5_\alpha\}, \{2_a, 2_b, 5_\beta\} \quad x = a, b \quad y = a, b, \quad (\alpha, \beta) = (a, b), (b, a)}$$

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

(i)~(iii) から, 求める確率は

$$\frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3^2 + 2^6 \cdot 3^2}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2^6 \cdot 3^2 (5 + 1 + 1)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2}{3 \cdot 5^2} = \frac{2}{75}$$

■

- 4** (必要性) 行列 A の表す 1 次変換によって, 点 $(x, y) \in D$ は $(ax-by, bx+ay) \in D$ に移るから,

$$1 \leq (ax-by)^2 + (bx+ay)^2 \leq 4 \quad \text{ゆえに} \quad 1 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \leq 4 \quad \cdots (*)$$

$1 \leq x^2+y^2 \leq 4$ であるから, $x^2+y^2=1$ のとき, $(*)$ を満たすから

$$1 \leq a^2+b^2 \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $x^2+y^2=4$ のとき, $(*)$ を満たすから

$$1 \leq 4(a^2+b^2) \leq 4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{4} \leq a^2+b^2 \leq 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad a^2+b^2=1$$

(十分性) $a^2+b^2=1$ のとき, $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を満たす θ が存在する. すなわち, 行列 A の表す 1 次変換は, 原点を中心に θ だけ回転させる 1 次変換であるから, D に含まれる三角形 PQR はこの変換によって移動した三角形 $P'Q'R'$ も D に含まれる. よって, 求める必要十分条件は

$$a^2+b^2=1$$

■

5 (1) $I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left[\log(\sin x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \log 2$

(2) $\cos(2n+1)x - \cos(2n-1)x = -2 \sin 2nx \sin x$ より, 正の整数 n について

$$\begin{aligned} I_n - I_{n-1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\sin x} dx \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx dx = \frac{1}{n} \left[\cos 2nx \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) = \frac{1}{n} \left\{ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (I_n - I_{n-1}) &= \sum_{n=1}^5 \frac{1}{n} \left\{ (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \\ I_5 - I_0 &= -1 + 1 + \left(-\frac{1}{3} \right) + 0 + \left(-\frac{1}{5} \right) = -\frac{8}{15} \end{aligned}$$

(1) の結果から $I_5 = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{8}{15}$

■

- 6** (1) $f(x) = (n+1)\{\log(a+x) - \log(n+1)\} - n(\log a - \log n) - \log x$ より

$$f'(x) = \frac{n+1}{a+x} - \frac{1}{x} = \frac{nx-a}{x(a+x)}$$

したがって, $f(x)$ の増減表は

x	(0)	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

よって, $\frac{a}{n}$ で, 極小値 0 をとる.

- (2) $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$, $T_n = \frac{S_n^n}{n^n(n+1)}$ とおくと (n は自然数)

$$\log T_n = \log \frac{S_n^n}{n^n(n+1)} = n(\log S_n - \log n) - \log(n+1) \quad \cdots (*)$$

(1) の等式において, $a = S_n$, $x = \frac{n+2}{n+1}$ とおくと, $a+x = S_{n+1}$ であることに注意すると, $f(x) \geq 0$ であるから

$$(n+1)\{\log S_{n+1} - \log(n+1)\} - n(\log S_n - \log n) - \log \frac{n+2}{n+1} \geq 0$$

したがって

$$\begin{aligned} (n+1)\{\log S_{n+1} - \log(n+1)\} - \log(n+2) \\ \geq n(\log S_n - \log n) - \log(n+1) \end{aligned}$$

上式および (*) より $\log T_{n+1} \geq \log T_n$ ゆえに $T_{n+1} \geq T_n$

$$\text{ここで } S_2 = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \text{ より } T_2 = \frac{S_2^2}{2^2(2+1)} = \frac{49}{48} > 1$$

2以上の自然数 n について, $T_n > 1$ であるから

$$\frac{S_n^n}{n^n(n+1)} > 1 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{S_n}{n}\right)^n > n+1$$

よって

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$$

■