

平成24年度 東北大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 s, t を実数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$ とおく. s, t が $s \geq 0, t \geq 0$ の範囲を動くとき, 点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ.
- (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$ とおく. s, t が実数全体を動くとき, 点 (x, y) の動く範囲を座標平面内に図示せよ.

2 m を実数とする. 座標平面上で直線 $y = x$ に関する対称移動を表す1次変換を f とし, 直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す1次変換を g とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 1次変換 g を表す行列 A を求めよ.
- (2) 合成変換 $g \circ f$ を表す行列 B を求めよ.
- (3) $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ.

3 袋A, 袋Bのそれぞれに, 1から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている. これらのカードをよくかきまぜて取り出していく. 以下の問いに答えよ.

- (1) $N = 4$ とする. 袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す. ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする. 4回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする. $X = 1, X = 2, X = 3, X = 4$ となる確率をそれぞれ求めよ. また, X の期待値を求めよ.
- (2) $N = 3$ とし, n は自然数とする. 袋A, Bのそれぞれから同時に1枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, それらのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す. カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする. p_n と q_n を求めよ.

4 $0 \leq x \leq \pi$ に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t - x|}{1 + \sin |t - x|} dt$$

と定める. $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ.

- 5 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする．線分 AB 上の点 Q を $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする．以下の問いに答えよ．

- (1) y を x を用いて表せ．
- (2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき， y が最大となる x を求めよ．

- 6 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

- (1) $n \geq 2$ のとき， $a_n > 1$ となることを示せ．
- (2) $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3}$ を満たす正の実数 α を求めよ．
- (3) すべての自然数 n に対して $a_n < \alpha$ となることを示せ．
- (4) $0 < r < 1$ を満たすある実数 r に対して，不等式

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq r \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ．さらに，極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．

解答例

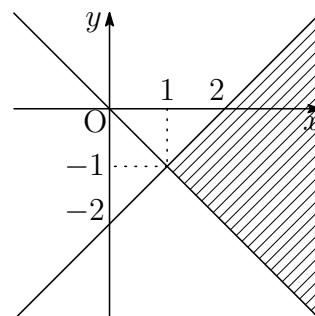
- 1 (1) $x = s + t + 1$, $y = s - t - 1$ から

$$s = \frac{x+y}{2}, \quad t = \frac{x-y-2}{2}$$

$s \geq 0$, $t \geq 0$ より

$$x + y \geq 0, \quad x - y - 2 \geq 0$$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で境界線を含む。



- (2) $x = st + s - t + 1$, $y = s + t - 1$ の2式から s を消去し、 t について整理すると

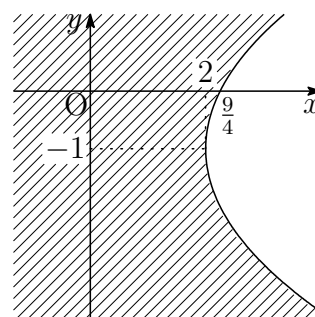
$$t^2 - (y-1)t + x - y - 2 = 0$$

この2次方程式は、実数解をもつから

$$(y-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x - y - 2) \geq 0$$

$$\text{したがって } x \leq \frac{1}{4}(y+1)^2 + 2$$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で境界線を含む。 ■



2 (1) g を表す行列 A について

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$$

ゆえに $A \begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$

よって $A = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$

(2) f の表す行列を F とすると, (1) の結果に $m=1$ を代入して $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

これと (1) の結果により

$$B = AF = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 2m & 1-m^2 \\ m^2-1 & 2m \end{pmatrix}$$

B をハミルトン・ケーリーの定理に適用することにより

$$B^2 = tB - E, \quad t = \frac{4m}{1+m^2}$$

したがって $B^3 = tB^2 - B = t(tB - E) - B = (t^2 - 1)B - tE$

$B^3 = E$ のとき $(t+1)\{(t-1)B - E\} = O$

上式より, 次の i), ii) の場合がある.

(i) $t = -1$ ゆえに $m = -2 \pm \sqrt{3}$

(ii) $t \neq -1$ のとき $(t-1)B - E = O$ となり, $t \neq 1$ に注意して

$$B = \frac{1}{t-1}E$$

これを $B^3 = E$ に代入すると $\frac{1}{(t-1)^3}E = E$

これより $\frac{1}{t-1} = 1$ すなわち $t = 2$ ゆえに $m = 1$ ■

- 3** (1) A から取り出されたカードを順に, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とし, これを用いた B からの取り出し方は $4!$ 通りある.

α だけが一致する場合, B の取り出し方は, 次の 2 通り.

$$\alpha\gamma\delta\beta, \quad \alpha\delta\beta\gamma$$

一致する組が ${}_4C_1$ 通りあるから $P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times 2}{4!} = \frac{1}{3}$

α, β だけが一致する場合, B の取り出し方は, $\alpha\beta\delta\gamma$ の 1 通り.

一致する組が ${}_4C_2$ 通りあるから $P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times 1}{4!} = \frac{1}{4}$

3 つが一致する場合はないので $P(X=3) = 0$

4 つとも一致する場合は 1 通りであるから $P(X=4) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

また, 期待値は $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{24} = 1$

- (2) 袋 A, B にカードが 3 枚ずつ残っているとき, 取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{3}$ である. n 回目で初めてカードの数字が一致する確率であるから

$$p_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

袋 A, B にカードが 2 枚ずつ残っているとき, 取り出したカードの数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$ である. このとき, m 回目で初めてカードの数字が一致する確率を r_m とすると

$$r_m = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{m-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$$

$q_1 = q_2 = 0$, q_n は ($n \geq 3$)

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=1}^{n-2} p_k r_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$



4 $u = t - x$ とおくと $\frac{du}{dt} = 1$

t	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
u	$-x \longrightarrow \frac{\pi}{2} - x$

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t-x|}{1 + \sin |t-x|} dt = \int_{-x}^{\frac{\pi}{2}-x} \frac{\cos |u|}{1 + \sin |u|} du$$

$$f'(x) = \frac{\cos |\frac{\pi}{2}-x|}{1 + \sin |\frac{\pi}{2}-x|} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)' - \frac{\cos |-x|}{1 + \sin |-x|} (-x)'$$

$$= -\frac{\cos |\frac{\pi}{2}-x|}{1 + \sin |\frac{\pi}{2}-x|} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

(i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f'(x) = -\frac{\cos (\frac{\pi}{2}-x)}{1 + \sin (\frac{\pi}{2}-x)} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = -\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(1 + \sin x + \cos x)}{(1 + \sin x)(1 + \cos x)}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき

$$f'(x) = -\frac{\cos (x - \frac{\pi}{2})}{1 + \sin (x - \frac{\pi}{2})} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = -\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$\text{このとき, } -\frac{\sin x}{1 - \cos x} < 0, \quad \frac{\cos x}{1 + \sin x} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad f'(x) < 0$$

(i), (ii) より, $f(x)$ の増減表は

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-		-	
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$		$\searrow$	

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1 + \sin u} du = \left[\log(1 + \sin u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \log 2,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{1 + \sin |u|} du = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\cos u}{1 - \sin u} du + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{1 + \sin u} du$$

$$= \left[-\log(1 - \sin u) \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 + \left[\log(1 + \sin u) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right),$$

$$f(\pi) = \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{1 - \sin u} du = \left[-\log(1 - \sin u) \right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} = -\log 2$$

よって 最大値 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, 最小値 $f(\pi) = -\log 2$ ■

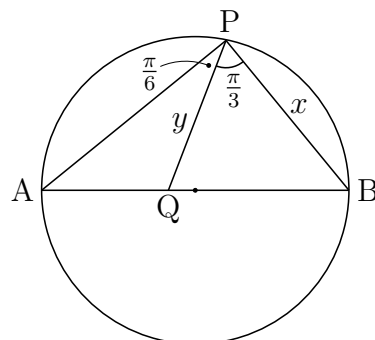
5 (1) $\angle BPQ = \frac{\pi}{3}$ より, $\angle APQ = \frac{\pi}{6}$

$$z = AP \text{ とおくと, } z = \sqrt{1-x^2}$$

$$\triangle BPQ + \triangle APQ = \triangle APB \text{ より}$$

$$\frac{1}{2}xy \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}yz \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}zx$$

$$\text{よって } y = \frac{2zx}{\sqrt{3}x + z} = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x + \sqrt{1-x^2}}$$



(2) $\theta = \angle ABP$ とおくと $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$, $x = \cos \theta$, $z = \sin \theta$ より

$$y = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta} = \frac{2}{\frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta}}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta} \text{ とおくと}$$

$$f'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^3 \theta - \sqrt{3} \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta (\tan^3 \theta - \sqrt{3})}{\sin^2 \theta}$$

ここで, $\tan \alpha = \sqrt[3]{3}$ とおくと $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

θ	(0)	$\dots$	α	$\dots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

したがって, $\theta = \alpha$ で $f(\theta)$ は最小, すなわち, y は最大となる.

$$\text{このとき } x^2 = \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{3}} \quad \text{よって } x = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}}}$$

別解 $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$ とおくと $x^2 + z^2 = 1$ より $x + zz' = 0$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{z} + \frac{1}{x} \right) \text{ を } x \text{ について微分すると } -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}z'}{z^2} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$y' = \frac{y^2}{2} \left(\frac{\sqrt{3}z'}{z^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{y^2}{2} \left(-\frac{\sqrt{3}x}{z^3} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{y^2(z^3 - \sqrt{3}x^3)}{2x^2z^3}$$

$$z = \sqrt[3]{3}x \text{ のとき, 極大(最大). このとき, } x^2 + z^2 = 1 \text{ より } x = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}}}$$

■

6 (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n + 4}{2a_n + 3}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より, $a_n > 0$ であるから

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{a_n + 1}{2a_n + 3}} > 1$$

これから, $a_2 > 1$. よって, 数学的帰納法により

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n > 1$$

(2) $\alpha^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3} \dots \textcircled{1}$ より $2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$

ゆえに $(\alpha + 1)(2\alpha^2 + \alpha - 4) = 0$ $\alpha > 0$ より $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}$

(3) $\textcircled{1}$ より $\alpha^2 - a_{n+1}^2 = \frac{3\alpha + 4}{2\alpha + 3} - \frac{3a_n + 4}{2a_n + 3} = \frac{\alpha - a_n}{(2\alpha + 3)(2a_n + 3)} \dots \textcircled{2}$

$a_n > 0, \alpha - a_1 > 0$ であるから, 上式により, $\alpha - a_n > 0$ のとき

$$\alpha^2 - a_{n+1}^2 > 0 \text{ ゆえに } \alpha > a_{n+1}$$

(4) $\textcircled{2}$ より $\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{(2\alpha + 3)(2a_n + 3)(a_{n+1} + \alpha)}$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{33} - 5}{4} > 1, a_n \geq 1 \text{ より}$$

$$2\alpha + 3 \geq 5, 2a_n + 3 \geq 5, a_n + \alpha \geq 2$$

したがって $\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 2}$ すなわち $\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq \frac{1}{50}$

上式および (3) の結果から $0 < \frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} \leq \frac{1}{50}$

$$0 < \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha - a_{k+1}}{\alpha - a_k} \leq \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{50} \text{ ゆえに } 0 < \alpha - a_n \leq \frac{1}{50^{n-1}}(\alpha - a_1)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{50^{n-1}}(\alpha - a_1) = 0$ であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - a_n) = 0 \text{ よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

■