

平成23年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理系(理, 医(医・保健(放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

問題 1 2 3 4 5 6

1 実数 a に対し, 不等式

$$y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$$

の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく.

- (1) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ.
- (2) $-1 \leq a \leq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 (p, q) の範囲を図示せよ.

2 a を実数とする. 円 C は点 $(a, -a)$ で直線 $y = -x$ を接線にもち, 点 $(0, 1)$ を通るものとする. C の中心を $P(X, Y)$ として, 以下の問いに答えよ.

- (1) X, Y を a を用いて表せ.
- (2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y = 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

3 先生と3人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある. 箱の中には最初, 赤玉3個, 白玉7個, 全部で10個の玉が入っている. 先生がサイコロをふって, 1の目が出たら A が, 2または3の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から1つだけ玉を取り出す操作を行う. 取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする. この操作を続けて行うものとして, 以下の問いに答えよ. ただし, サイコロの1から6の目の出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする.

- (1) 2回目の操作が終わったとき, A が2個の赤玉を手に入れている確率を求めよ.
- (2) 2回目の操作が終わったとき, B が少なくとも1個の赤玉を手に入れている確率を求めよ.
- (3) 3回目の操作で, C が赤玉を取り出す確率を求めよ.

4 平面上に長さ3の線分 OA を考え, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a}$ で表す. $0 < t < 1$ を満たす実数 t に対して, $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$ となるように点 P を定める. 大きさ2のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ ($0 < \theta < \pi$) をなすようにとり, 点 B を $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ で定める. 線分 OB の中点を Q とし, 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする. このとき, どのように θ をとっても OR と AB が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ.

5 a を実数, z を 0 でない複素数とする. z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す.

(1) 次を満たす z を求めよ.

$$z + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(2) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$$

(3) 次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ.

$$z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$$

6 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする. f による点 $P(1, 1)$ の像を P_1 とする. 正の整数 n に対し, P_n の f による像を P_{n+1} とする. P_n が点 $Q(10, 10)$ に最も近くなるときの n の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y \leq 2ax - a^2 + 2a + 2$ より $a^2 - 2(x+1)a + y - 2 \leq 0$
 点 (p, q) が上式を満たすとき $a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leq 0$
 上式から, a の関数

$$\begin{aligned} f(a) &= a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \quad (-1 \leq a \leq 2) \\ &= (a - p - 1)^2 - (p+1)^2 + q - 2 \end{aligned}$$

とし, $f(a)$ の最大値を M とする.

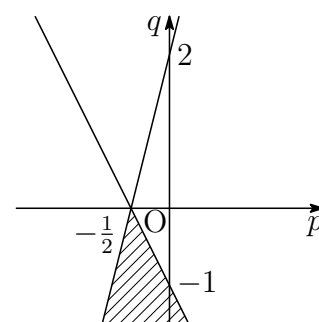
- (i) $p+1 \leq \frac{1}{2}$ のとき $M = f(2) = -4p + q - 2$
 (ii) $\frac{1}{2} \leq p+1$ のとき $M = f(-1) = 2p + q + 1$

条件をみたすとき, $M \leq 0$ であるから

$$p \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき } q \leq 4p + 2$$

$$-\frac{1}{2} \leq p \text{ のとき } q \leq -2p - 1$$

よって, 点 (p, q) の表す領域は右の図の斜線部分で境界線を含む.



補足 定義域 $-1 \leq a \leq 2$ の中央 $\frac{1}{2}$ が軸 $a = p+1$ に対して, 左側にあるとき左端で最大, 右側にあるとき右端で最大となる.

- (2) $f(a)$ の最小値を m とすると

- (i) $p+1 \leq -1$ のとき, $m = f(-1) = 2p + q + 1$
 (ii) $-1 \leq p+1 \leq 2$ のとき, $m = f(p+1) = -(p+1)^2 + q - 2$
 (iii) $2 \leq p+1$ のとき, $m = f(2) = -4p + q - 2$

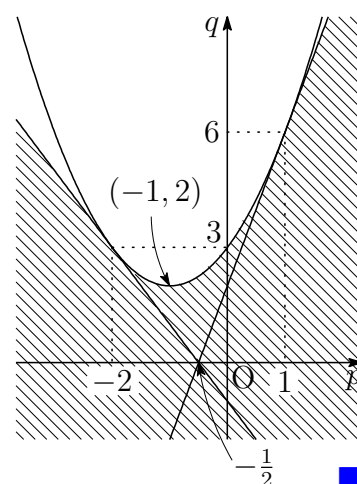
条件を満たすとき, $m \leq 0$ であるから

$$p \leq -2 \text{ のとき } q \leq -2p - 1$$

$$-2 \leq p \leq 1 \text{ のとき } q \leq (p+1)^2 + 2$$

$$1 \leq p \text{ のとき } q \leq 4p + 2$$

よって, 点 (p, q) の表す領域は右の図の斜線部分で境界線を含む.



- 2 (1) $F(0, 1)$, $H(a, -a)$ とおくと

$$\overrightarrow{FH} = (a, -a-1)$$

直線 FH の垂直二等分線は

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) + (-a-1)\left(y - \frac{1-a}{2}\right) = 0$$

$$\text{ゆえに } ax - (a+1)y - a^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 HP は、点 $H(a, -a)$ を通り、傾き 1 の直線であるから

$$y - (-a) = 1(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 2a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$P(X, Y)$ は、連立方程式 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の解であるから

$$X = a^2 + 2a + \frac{1}{2}, \quad Y = a^2 + \frac{1}{2}$$

解説 点 P の軌跡は点 F を焦点, l を準線とする放物線.

- (2) 直線 $y = -x$ を l とする. O を原点とし, l に平行に s 軸, l に垂直に t 軸をとる. x - y 系からの s - t 系への直交変換を次に定める.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{s}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } x = \frac{s+t}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{-s+t}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad s = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

点 $P\left(a^2 + 2a + \frac{1}{2}, a^2 + \frac{1}{2}\right)$ はこの直交変換により

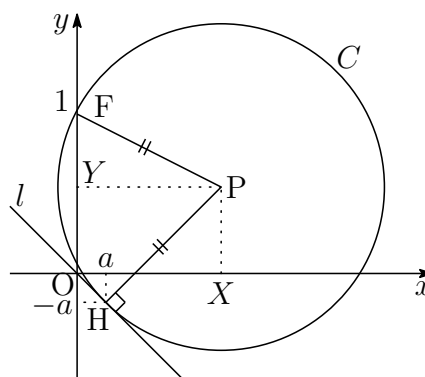
$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^2 + 2a + \frac{1}{2} - \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \right\} = \sqrt{2}a$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^2 + 2a + \frac{1}{2} + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) \right\} = \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2}a + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{上の 2 式から, } P \text{ の軌跡の方程式は } t = \frac{s^2}{\sqrt{2}} + s + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots \textcircled{3}$$

直線 $y = 1$, すなわち点 $(x, 1)$ はこの直交変換により

$$s = \frac{x-1}{\sqrt{2}}, \quad t = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに} \quad t = s + \sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$



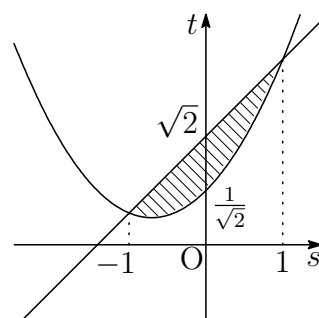
放物線 ③ と直線 ④ の共有点の s 座標は

$$\frac{s^2}{\sqrt{2}} + s + \frac{1}{\sqrt{2}} = s + \sqrt{2}$$

これを解いて $s = \pm 1$

よって、求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left\{ s + \sqrt{2} - \left(\frac{s^2}{\sqrt{2}} + s + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (1+s)(1-s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{6} (1+1)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

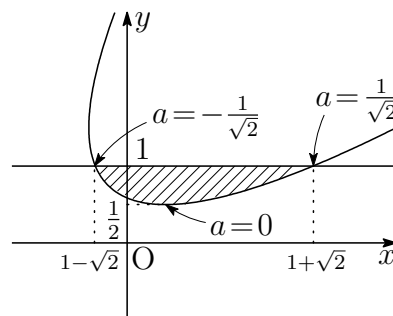


別解 (媒介変数による求積法) (1) の結果から、

$$\begin{aligned} x &= f(a) = a^2 + 2a + \frac{1}{2} \\ y &= g(a) = a^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

とおくと、点 (x, y) の表す図形は、 a を媒介変数とする曲線である。

$$y = 1 \text{ とすると } a^2 + \frac{1}{2} = 1 \text{ これを解いて } a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



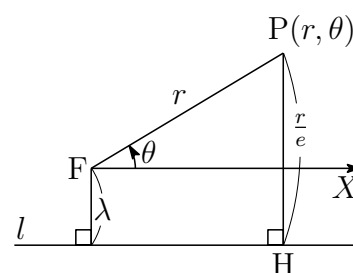
$$\begin{aligned} S &= \int_{f(-\frac{1}{\sqrt{2}})}^{f(\frac{1}{\sqrt{2}})} (1-y) dx = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \{1 - g(a)\} f'(a) da \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - a^2 \right) (2a + 2) da \\ &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^3 - 2a^2 + a + 1) da = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-2a^2 + 1) da \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3} a^3 + a \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

次のように求めることもできる.

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{g(0)}^{g(\frac{1}{\sqrt{2}})} x \, dy - \int_{g(0)}^{g(-\frac{1}{\sqrt{2}})} x \, dy = \int_{g(-\frac{1}{\sqrt{2}})}^{g(\frac{1}{\sqrt{2}})} x \, dy \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(a)g'(a) \, da = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(a^2 + 2a + \frac{1}{2} \right) \cdot 2a \, da \\
 &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (2a^3 + 4a^2 + a) \, da = 8 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} a^2 \, da = \frac{8}{3} \left[a^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

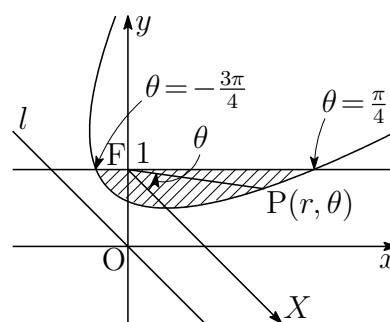
注意 2次曲線の極方程式の極は, 2次曲線の焦点である (原点ではない). 右の図における2次曲線の焦点 F と準線 l の距離を λ , 偏角を θ , 離心率を $e = \frac{PF}{PH}$ とすると

$$r \sin \theta + \lambda = \frac{r}{e} \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{e\lambda}{1 - e \sin \theta}$$



(極方程式による求積法) 焦点 $F(0, 1)$ から準線 $l: y = -x$ までの距離 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ および離心率 $e = 1$ より

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{1}{\sqrt{2}(1 - \sin \theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2})^2} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2} \cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}
 \end{aligned}$$



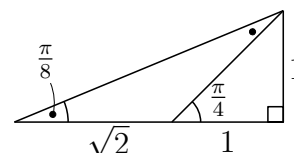
よって, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \, d\theta = \frac{1}{16} \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^4(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{dx}{\cos^4 x} \\
 &= \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} (1 + \tan^2 x)(\tan x)' \, dx = \frac{1}{8} \left[\tan x + \frac{\tan^3 x}{3} \right]_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}}
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで} \quad \tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2},$$

$$\tan \left(-\frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



- 3** (1) サイコロは2回とも1の目が出て、Aが2回とも赤玉を取り出す確率であるから

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{540}$$

- (2) 1回目の操作でBが赤玉を取り出す事象を X とすると

$$P(X) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$$

2回目の操作でBが赤玉を取り出す事象を Y とすると

$$P(Y) = P(X) = \frac{1}{10}$$

2回の操作でBが2回とも赤玉を取り出す確率 $P(X \cap Y)$ は

$$P(X \cap Y) = \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{135}$$

よって、求める確率は

$$\begin{aligned} P(X \cup Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{135} = \frac{26}{135} \end{aligned}$$

注意 非復元試行でも、1回目、2回目の操作で赤玉を取り出す確率はともに $\frac{3}{10}$

- (3) 3回目の操作でCが赤玉を取り出す確率は

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}$$

解説 箱の中に赤玉が r 個、白玉が w 個あるとき、赤玉を取り出す確率 p は

$$p = \frac{r}{r+w}$$

取り出した玉を戻さない(非復元試行)とき、箱の中に残る赤玉の個数が $r-1$ 個になる確率が p で、赤玉の個数が r 個になる確率は $1-p$ である。したがって、次の試行で赤玉を取り出す確率は

$$\begin{aligned} p \times \frac{r-1}{r+w-1} + (1-p) \times \frac{r}{r+w-1} &= \frac{r-p}{r+w-1} \\ &= \frac{(r+w)p-p}{r+w-1} = p \end{aligned}$$

よって、赤玉が取り出される確率は、何回目であっても不変である。

本題において、1回目の操作で赤玉が取り出される確率が $\frac{3}{10}$ であるから、3回目の操作で赤玉が取り出される確率も $\frac{3}{10}$ である。 ■

4 $\overrightarrow{OP} = t\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{t}\overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OQ}$$

$$\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OR} = x\overrightarrow{OA} + 2y\overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{x}{t}\overrightarrow{OP} + y\overrightarrow{OB}$$

点 R は直線 AQ および BP 上の点であるから ($0 < t < 1$)

$$x + 2y = 1, \quad \frac{x}{t} + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{t}{2-t}, \quad y = \frac{1-t}{2-t}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OR} = \frac{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}}{2-t}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} (2-t)\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= \{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -t|\vec{a}|^2 + (2t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (1-t)|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 2, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 6 \cos \theta \text{ より}$$

$$\begin{aligned} (2-t)\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{AB} &= -9t + (2t-1) \cdot 6 \cos \theta + 4(1-t) \\ &= 6(2t-1) \cos \theta - 13t + 4 \end{aligned}$$

$f(\theta) = 6(2t-1) \cos \theta - 13t + 4$ ($0 < \theta < \pi$) とすると, 常に $f(\theta) \neq 0$ となる t の値の範囲を求めればよい.

(i) $2t-1 > 0$, すなわち, $\frac{1}{2} < t < 1$ のとき $f(\pi) < f(\theta) < f(0)$

(ii) $2t-1 = 0$, すなわち, $t = \frac{1}{2}$ のとき $f(\theta) = -\frac{5}{2} \neq 0$ より, 条件を満たす.

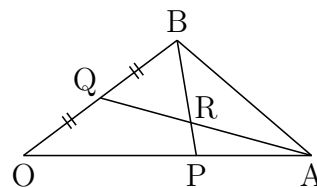
(iii) $2t-1 < 0$, すなわち, $0 < t < \frac{1}{2}$ のとき $f(0) < f(\theta) < f(\pi)$

(i), (iii) のとき, 次式を満たせばよい.

$$f(0)f(\pi) = (-t-2)(-25t+10) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(5t-2) \geq 0$$

$$0 < t < 1 \text{ において, これを解くと} \quad \frac{2}{5} \leq t < 1$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ も条件を満たすことに注意して} \quad \frac{2}{5} \leq t < 1$$



- 5** (1) (i) $a \neq 0$ のとき, $z + 1 = \frac{a}{z}$ であるから ($z \neq 0$)

$$z^2 + z - a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

- (ii) $a = 0$ のとき, $z + 1 = \frac{a}{z} = 0$ より ($z \neq 0$) $z = -1$

$$\text{よって } a \neq 0 \text{ のとき } z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$a = 0 \text{ のとき } z = -1$$

- (2) $\bar{z} + 1 - \frac{a}{z} = 0$ より ($z \neq 0$) $z = a - |z|^2$

$$a, |z| \text{ は実数より, } z \text{ は実数であるから } |z|^2 = z^2$$

$$\text{ゆえに } z = a - z^2 \quad \text{すなわち} \quad z^2 + z - a = 0 \quad \cdots (*)$$

方程式 (*) が実数解をもつから, 係数について

$$1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a) \geq 0 \quad \text{よって} \quad a \geq -\frac{1}{4}$$

- (3) $z(\bar{z})^2 + \bar{z} - \frac{a}{z} = 0$ より, $\bar{z}(|z|^2 + 1) = \frac{a}{z}$ ($z \neq 0$) であるから

$$|z|^2(|z|^2 + 1) = a \quad \text{ゆえに} \quad a = \left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$|z| > 0 \text{ により} \quad a > 0$$



6 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ をハミルトン・ケーリーの定理に適用すると

$$A^2 - 2A + E = O \quad \text{ゆえに} \quad A^{k+1} - A^k = A - E$$

$$n > 1 \text{ のとき, } \sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1} - A^k) = \sum_{k=1}^{n-1} (A - E) \text{ より}$$

$$A^n - A = (n-1)(A - E) \quad \text{ゆえに} \quad A^n = n(A - E) + E$$

上式は, $n = 1$ のときも成立するから

$$A^n = n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix}$$

ゆえに, 点 P_n は

$$\begin{pmatrix} 2n+1 & -n \\ 4n & -2n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

$Q(10, 10)$ より

$$\begin{aligned} P_n Q^2 &= (n-9)^2 + (2n-9)^2 = 5n^2 - 54n + 162 \\ &= 5 \left(n - \frac{27}{5} \right)^2 + \frac{81}{5} \end{aligned}$$

よって, 求める n の値は **$n = 5$** ■