

平成19年度 東北大学2次試験前期日程 (数学問題)150分
理系 (理, 医 (医・保健 (放射線・検査)), 歯, 薬, 工, 農)

- 理・工学部は, 1 2 3 4 5 6 数I・II・III・A・B・C (150分)
- 医 [医, 保健 (放射線技術・検査技術) 学科]・歯・薬・農学部は, 1 2 3 4 数I・II・III・A・B・C (100分)

1 n を2以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする.

- (1) a_2, b_2 を求めよ.
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ.
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ.

2 $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して, $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする. また, 線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする. $\angle A = \theta$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\sin \theta$ を求めよ.
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ. ただし, $\sqrt{2} = 1.414\cdots$, $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい.

3 自然数 n に対し, 方程式

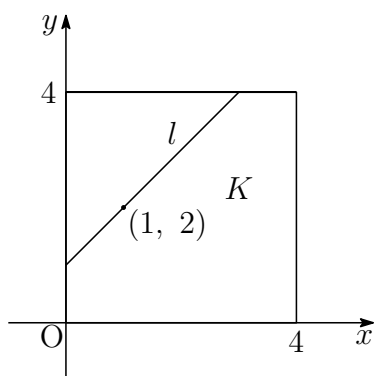
$$\frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e} = 0$$

を考える. ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする.

- (1) 上の方程式は $x \geq 1$ にただ一つの解をもつことを示せ.
- (2) (1) の解を x_n とする. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示せ.

- 4 xy 平面上に 4 点 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$ を頂点とする正方形 K を考える. 点 $(1, 2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく.

- (1) l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ.
 (2) l の長さの最小値を求めよ.



- 5 xyz 空間において, 点 $(1, 0, 1)$ と点 $(1, 0, 2)$ を結ぶ線分を l とし, l を z 軸のまわりに一回転してできる図形を A とする. A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求めよ.

- 6 $a > 0$ に対し

$$I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} \, dx, \quad I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} \, dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とおく.

- (1) $\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ.
 (2) 漸化式

$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

を示せ.

- (3) 自然数 n に対して, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $x^2 = (x^2 - 6x - 12) \cdot 1 + 6x + 12$ より $a_2 = 6, b_2 = 12$

(2) x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^n = (x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + a_nx + b_n$$

したがって

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (x^2 - 6x - 12)xQ_n(x) + a_nx^2 + b_nx \\ &= (x^2 - 6x - 12)xQ_n(x) + a_n(x^2 - 6x - 12) + a_n(6x + 12) + b_nx \\ &= (x^2 - 6x - 12)\{xQ_n(x) + a_n\} + (6a_n + b_n)x + 12a_n \end{aligned}$$

よって $a_{n+1} = 6a_n + b_n, b_{n+1} = 12a_n$

(3) a_2, b_2 の公約数で素数であるものは 2, 3
 $a_k \equiv 0, b_k \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, (2) の結果から

$$a_{k+1} \equiv 0, b_{k+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

これと (1) の結果から, すべての自然数 n , 素数 $p(p = 2, 3)$ について

$$a_n \equiv 0, b_n \equiv 0 \pmod{p}$$

(1) より, $n = 2$ のときは 2, 3 以外の素数公約数をもたない. したがって, a_n, b_n が, $n = l + 1$ ($l \geq 2$) のときに初めて, 2, 3 以外の素数 q を公約数にもつ, すなわち

$$a_{l+1} \equiv 0, b_{l+1} \equiv 0 \pmod{q}$$

と仮定すると, (2) の結果から

$$(*) \quad 6a_l + b_l \equiv 0, \quad 12a_l \equiv 0 \pmod{q}$$

(*) の第 2 式から $a_l \equiv 0 \pmod{q}$

これを (*) の第 1 式に代入すると $b_l \equiv 0 \pmod{q}$

$n = l$ のときも, a_n, b_n が素数 q を約数にもち, 矛盾を生じる.

したがって, a_n, b_n は 2, 3 以外の素数を公約数にもたない.

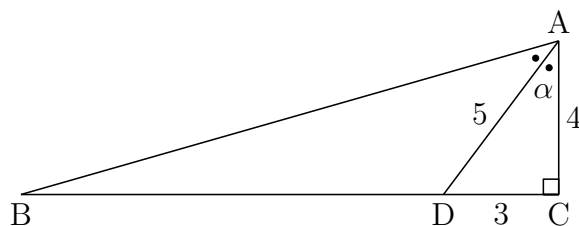
よって, a_n, b_n の公約数は, すべての n について **2, 3** ■

2 (1) $\theta = 2\alpha$ とおくと、右の図から

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$



$$(2) \cos \theta = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$\text{これと (1) の結果より} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{24}{7}$$

$$\text{また} \quad \tan \frac{5}{12}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5}{12}\pi - \tan \theta = 2 + \sqrt{3} - \frac{24}{7} = \frac{7\sqrt{3} - 10}{7} = \frac{\sqrt{147} - \sqrt{100}}{7} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \tan \theta < \tan \frac{5}{12}\pi \quad \text{よって} \quad \theta < \frac{5}{12}\pi$$

補足 $\sin \theta < \sin \frac{5}{12}\pi$ を示してもよいが、 θ が鋭角であることに注意する必要がある。またその大小の評価も僅差となる。実際

$$\begin{aligned} \sin \frac{5}{12}\pi &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} \\ &> \frac{1.41(1.73 + 1)}{4} = 0.962325 \\ &> 0.96 = \frac{24}{25} = \sin \theta \end{aligned}$$

■

3 (1) $f(x) = \frac{1}{x^n} - \log x - \frac{1}{e}$ とおくと

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} - \frac{1}{x} < 0$$

$$\text{また } f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \quad f(e^{\frac{1}{n}}) = -\frac{1}{n} < 0$$

よって、方程式 $f(x) = 0$ は、 $x \geq 1$ にただ一つの解をもつ。

(2) (1) の結果から、 $f(x) = 0$ の解 x_n は

$$1 < x_n < e^{\frac{1}{n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$



- 4 (1) 点 $(1, 2)$ を通り、傾き m の直線 $y = m(x-1) + 2$ で K に含まれる部分 l の長さを $f(m)$ とすると、 l の直線 $y = 2$ に関する対称性から、 $f(m) = f(-m)$ が成り立つため、 $f(m)$ は偶関数となる。よって、 $m \geq 0$ における $f(m)$ の最大値・最小値を求めればよい。

$$(i) \quad 0 \leq m \leq \frac{2}{3} \text{ のとき } f(m) = 4\sqrt{1+m^2}$$

$$(ii) \quad \frac{2}{3} \leq m \leq 2 \text{ のとき } f(m) = \left(1 + \frac{2}{m}\right) \sqrt{1+m^2}$$

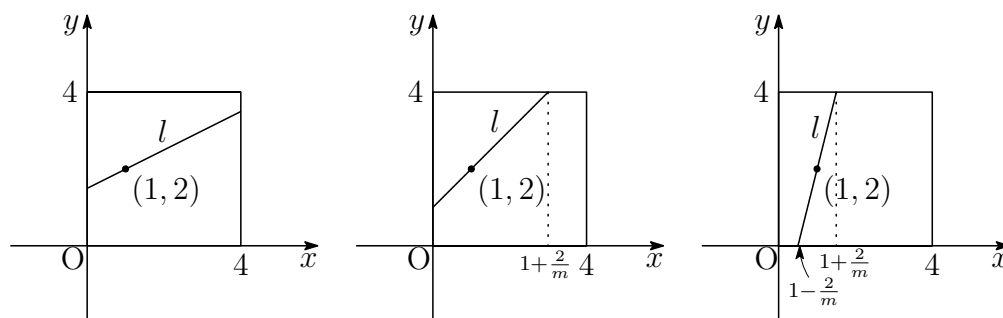
$$f'(m) = \frac{m^3 - 2}{m^2 \sqrt{1+m^2}}$$

(iii) $2 \leq m$ のとき

$$f(m) = \left\{ \left(1 + \frac{2}{m}\right) - \left(1 - \frac{2}{m}\right) \right\} \sqrt{1+m^2} = 4\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}}$$

(iv) l が y 軸と平行なときは、 $f(0)$ に等しい。

(i) $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$ のとき (ii) $\frac{2}{3} \leq m \leq 2$ のとき (iii) $2 \leq m$ のとき



(i)~(iv) より、 $f(m)$ の増減表は

m	0	...	$\frac{2}{3}$	...	$\sqrt[3]{2}$	...	2	...
$f'(m)$		+		-	0	+		-
$f(m)$	4	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{13}}{3}$	$\searrow$	$(1 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$

$$\sqrt{52} > \sqrt{45} \text{ より } 2\sqrt{13} > 3\sqrt{5} \text{ ゆえに } \frac{4\sqrt{13}}{3} > 2\sqrt{5}$$

$$(iii) \text{ より, } 2 \leq m \text{ のとき } f(m) = 4\sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} > 4$$

$$\text{よって 最大値 } \frac{4\sqrt{13}}{3}, |m| = \frac{2}{3} \text{ より } y = \pm \frac{2}{3}(x-1) + 2$$

$$(2) \quad 1 + \sqrt[3]{4} > 2\sqrt{1 \cdot \sqrt[3]{4}} = 2\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} \text{ ゆえに } (1 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}} > (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4$$

(1) で示した増減表から 最小値 4



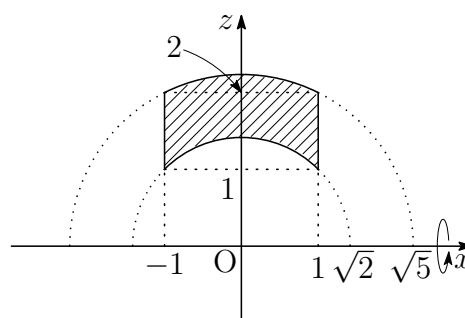
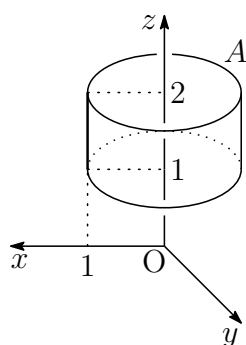
- 5 A を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を V とすると、 V は右下の図の斜線部分を x 軸のまわり一回転してできる回転体の体積である。

zx 平面上の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ の同心円

$$x^2 + z^2 = 1^2 + 1^2, \quad x^2 + z^2 = 1^2 + 2^2$$

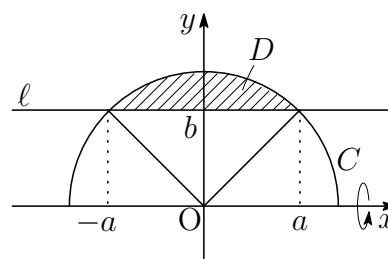
により、2 曲線 $z = \sqrt{2 - x^2}$, $z = \sqrt{5 - x^2}$ および 2 直線 $x = -1$, $x = 1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに一回転してできる回転体の体積に等しいから

$$V = \pi \int_{-1}^1 \{(\sqrt{5 - x^2})^2 - (\sqrt{2 - x^2})^2\} dx = \pi \int_{-1}^1 3 dx = 6\pi$$



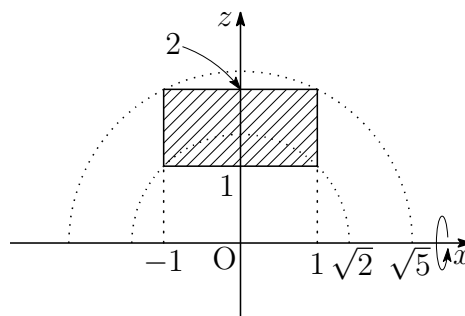
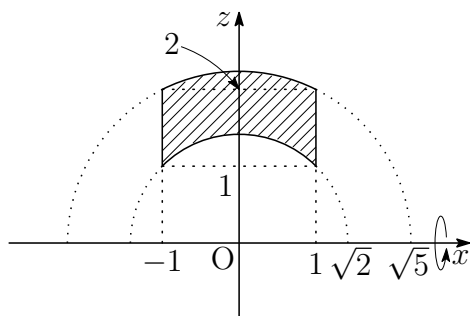
解説 半円 $C: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ($y \geq 0$) と直線 $\ell: y = b$ ($b \geq 0$) で囲まれた領域を D とする。 D を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (y^2 - b^2) dx \\ &= \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$



とくに、 V は C の半径 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ に関係なく a の値により決定する。

補足 曲線 $z = \sqrt{5 - x^2}$ と直線 $z = 2$ で囲まれた領域、曲線 $z = \sqrt{2 - x^2}$ と直線 $z = 1$ で囲まれた領域を x 軸のまわりに回転させた回転体の体積は等しい。よって、 V は右下の図の長方形を x 軸のまわり一回転させた回転体の体積に等しい。



6 (1) $I_0(a) = \int_0^a \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} \left\{ (1+a)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\}$ より

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{3} a^{-\frac{3}{2}} \left\{ (1+a)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(2) $I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx$ より

$$\begin{aligned} I_n(a) &= \int_0^a x^n \left\{ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right\}' dx \\ &= \left[x^n \left\{ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right\} \right]_0^a - \frac{2}{3} n \int_0^a x^{n-1} (1+x) \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} n \int_0^a x^{n-1} \sqrt{1+x} dx - \frac{2}{3} n \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} n I_{n-1}(a) - \frac{2}{3} n I_n(a) \end{aligned}$$

よって
$$I_n(a) = \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}} - \frac{2n}{3+2n} I_{n-1}(a)$$

(3) 定義式より, $I_{n-1}(a) > 0$ であるから, これを (2) の結果に適用すると

$$I_n(a) < \frac{2}{3+2n} a^n (1+a)^{\frac{3}{2}}$$

ゆえに
$$a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) < \frac{2}{3+2n} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots (*)$$

$$I_n(a) = \int_0^a x^n \sqrt{1+x} dx \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ より } (a > 0)$$

$$I_n(a) > \int_0^a x^n \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3+2n} x^{n+\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3+2n} a^{\frac{3}{2}+n}$$

ゆえに
$$a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) > \frac{2}{3+2n} \quad \cdots (**)$$

(*), (**) より
$$\frac{2}{3+2n} < a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) < \frac{2}{3+2n} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{3+2n} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3+2n}$$
 であるから, はさみうちの原理により

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a^{-(\frac{3}{2}+n)} I_n(a) = \frac{2}{3+2n}$$

■