

平成 26 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における接線を l_1 , 点 $Q(b, b^2)$ における接線を l_2 とする. ただし, $a < b$ とする. l_1 と l_2 の交点を R とし, 線分 PR , 線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする.

- (1) R の座標を a と b を用いて表せ.
- (2) S を a と b を用いて表せ.
- (3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ.

2 1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ, 合計 10 個ある.

- (1) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す. 書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ.
- (2) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す. 書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ.
- (3) 10 個の玉を袋に入れ, よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す. 1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と, 4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ.

3 t を正の実数とする. 三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M , 辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする. 線分 AN と線分 BM の交点を P とする.

- (1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ および t を用いて表せ.
- (2) 直線 OP は線分 BM と直交し, かつ $\angle AOB$ の二等分線であるとする. このとき, 辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ.

4 実数 x, y に対して $A = 2 \sin x + \sin y$, $B = 2 \cos x + \cos y$ とおく.

- (1) $\cos(x - y)$ を A, B を用いて表せ.
- (2) x, y が $A = 1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x, \cos x$ の値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$
 点 $P(a, a^2)$ における接線の方程式は

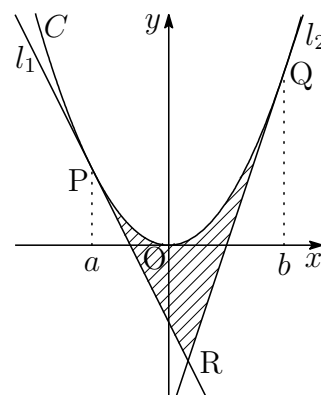
$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$\text{ゆえに } y = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

同様に、点 $Q(b, b^2)$ における接線の方程式は

$$y = 2bx - b^2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } R\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$



- (2) 求める面積 S は、図の斜線部分の面積であるから ¹

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \{x^2 - (2bx - b^2)\} dx \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 dx \\ &= \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{(x-b)^3}{3} \right]_{\frac{a+b}{2}}^b \\ &= \frac{1}{24}(b-a)^3 - \frac{1}{24}(a-b)^3 = \frac{1}{12}(b-a)^3 \end{aligned}$$

- (3) 直線 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ が直交するから

$$2a \times 2b = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a = -\frac{1}{4b}$$

$$\text{これを (2) の結果に代入すると } S = \frac{1}{12} \left(b + \frac{1}{4b}\right)^3$$

$a < b$ より、 $b > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係により

$$b + \frac{1}{4b} \geq 2\sqrt{b \times \frac{1}{4b}} = 1$$

$$\text{よって、求める } S \text{ の最小値は } \frac{1}{12} \cdot 1^3 = \frac{1}{12}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_bun-2009.pdf 4 を参照

2 10 個の数字が書かれた玉を次のように区別して考える.

$$\{1_a, 1_b, 2_a, 2_b, 3_a, 3_b, 4_a, 4_b, 5_a, 5_b\}$$

(1) 10 個の玉から 2 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_2 = 45$ (通り)

書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは, 2 と 5 を 1 個ずつ取り出す場合であるから $\boxed{\{2_x, 5_y\} \quad x = a, b \quad y = a, b}$

$$2 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{4}{45}$

(2) 10 個の玉から 4 個取り出す場合の総数は ${}_{10}C_4 = 210$ (通り)

書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは, $\{1, 4, 5, 5\}, \{2, 2, 5, 5\}$ の組合せであるから $\boxed{\{1_x, 4_y, 5_a, 5_b\}, \{2_a, 2_b, 5_a, 5_b\} \quad x = a, b \quad y = a, b}$

$$2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は $\frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

(3) 10 個の玉から 6 個の玉を順序を付けて取り出す場合の総数は

$${}_{10}P_6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ (通り)}$$

(i) 前半 3 個と後半 3 個に書かれている数字が同じ 3 種類の数字のとき
前半 3 個が ${}_5P_3 \cdot 2^3$ 通りで後半 3 個が $3!$ 通りであるから

$${}_5P_3 \cdot 2^3 \times 3! = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

(ii) 前半 3 個と後半 3 個の組合せが $\{1, 3, 4\}$ と $\{2, 2, 3\}$ のとき

$$\boxed{\{1_x, 3_\alpha, 4_y\}, \{2_a, 2_b, 3_\beta\} \quad x = a, b \quad y = a, b, \quad (\alpha, \beta) = (a, b), (b, a)}$$

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

(iii) 前半 3 個と後半 3 個の組合せが $\{1, 4, 5\}$ と $\{2, 2, 5\}$ のとき

$$\boxed{\{1_x, 4_y, 5_\alpha\}, \{2_a, 2_b, 5_\beta\} \quad x = a, b \quad y = a, b, \quad (\alpha, \beta) = (a, b), (b, a)}$$

$$3! \times 3! \times 2^3 \times 2 = 2^6 \cdot 3^2 \text{ (通り)}$$

(i)~(iii) から, 求める確率は

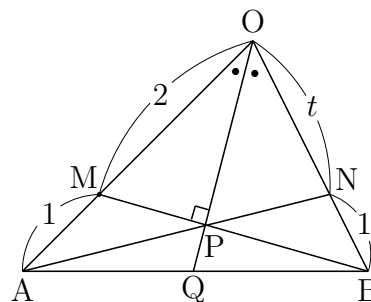
$$\frac{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 + 2^6 \cdot 3^2 + 2^6 \cdot 3^2}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2^6 \cdot 3^2 (5 + 1 + 1)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} = \frac{2}{3 \cdot 5^2} = \frac{2}{75}$$

■

3 (1) $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$ とおくと
 $\overrightarrow{OB} = \frac{t+1}{t}\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OM}$ より

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + \frac{t+1}{t}y\overrightarrow{ON},$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}x\overrightarrow{OM} + y\overrightarrow{OB}$$



点 P は、直線 AN および直線 BM 上の点であるから

$$x + \frac{t+1}{t}y = 1, \quad \frac{3}{2}x + y = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2}{t+3}, \quad y = \frac{t}{t+3}$$

よって
$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{t+3}\overrightarrow{OA} + \frac{t}{t+3}\overrightarrow{OB}$$

(2) (1) の結果から $AQ : QB = t : 2$

また、線分 OQ は $\angle AOB$ の二等分線であるから

$$OA : OB = AQ : QB \quad \text{ゆえに} \quad OA : OB = t : 2$$

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおくと ($|\vec{a}| : |\vec{b}| = t : 2$), (1) の結果から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{t+3}(2\vec{a} + t\vec{b}), \quad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - 3\vec{b})$$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{BM}$ であるから

$$(2\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4|\vec{a}|^2 + 2(t-3)\vec{a} \cdot \vec{b} - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$

$|\vec{a}| = \frac{t}{2}|\vec{b}|$ に注意して、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$t^2|\vec{b}|^2 + t(t-3)|\vec{b}|^2 \cos \theta - 3t|\vec{b}|^2 = 0$$

$$t(t-3)(1 + \cos \theta)|\vec{b}|^2 = 0$$

$t > 0$, $1 + \cos \theta \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ であるから $t = 3$

よって $OA : OB = 3 : 2$ ■

4 (1) $A = 2 \sin x + \sin y$, $B = 2 \cos x + \cos y$ より

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (2 \sin x + \sin y)^2 + (2 \cos x + \cos y)^2 \\ &= 5 + 4(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= 5 + 4 \cos(x - y) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \cos(x - y) = \frac{A^2 + B^2 - 5}{4}$$

(2) $A = 1$ のとき, $\textcircled{1}$ から $B^2 = 4 + 4 \cos(x - y)$

$-1 \leq \cos(x - y) \leq 1$ であるから

$$0 \leq B^2 \leq 8 \quad \text{ゆえに} \quad -2\sqrt{2} \leq B \leq 2\sqrt{2}$$

$B = \pm 2\sqrt{2}$ のとき, $\cos(x - y) = 1$ であるから,

$$x - y = 2n\pi$$

とおくと (n は整数), $y = x - 2n\pi$ より, $A = 1$ であるから

$$A = 2 \sin x + \sin(x - 2n\pi) = 3 \sin x = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x = \frac{1}{3},$$

$$B = 2 \cos x + \cos(x - 2n\pi) = 3 \cos x$$

$$\sin x = \frac{1}{3} \text{ より, } \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって $\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき, B の最大値 $2\sqrt{2}$

$\sin x = \frac{1}{3}$, $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき, B の最小値 $-2\sqrt{2}$ ■