

平成 25 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 a を実数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 2(a+1)x + 3a = 0$ が, $-1 \leq x \leq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.
- (2) a が (1) で求めた範囲を動くとき, 放物線 $y = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ の頂点の y 座標がとりうる値の範囲を求めよ.

2 四面体 OABC において, $OA = OB = OC = 1$ とする.

$\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 45^\circ$, $\angle COA = 45^\circ$ とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく. 点 C から面 OAB に垂線を引き, その交点を H とする.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.
- (2) CH の長さを求めよ.
- (3) 四面体 OABC の体積を求めよ.

3 A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う. 自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する. A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ.

- (1) B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ.
- (2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ.
- (3) B がちょうど 2 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ.

4 t は $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数とする. 放物線 $y = x^2$, 直線 $x = 1$, および x 軸とで囲まれた図形を A, 放物線 $y = 4(x-t)^2$ と直線 $y = 1$ とで囲まれた図形を B とする. A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする.

- (1) $S(t)$ を求めよ.
- (2) $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ.

解答例

- 1** (1) $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 3a$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - a - 1)^2 - a^2 + a - 1, \\ -a^2 + a - 1 &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって、 $f(x) = 0$ は、異なる 2 つの実数解をもつ。

この解が $-1 \leq x \leq 3$ の範囲にある条件は

$$-1 < a + 1 < 3, \quad f(-1) \geq 0, \quad f(3) \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad -2 < a < 2, \quad 5a + 3 \geq 0, \quad -3a + 3 \geq 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{3}{5} \leq a \leq 1$$

- (2) (*) より、放物線の頂点の y 座標を $g(a)$ とすると

$$g(a) = -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$-\frac{3}{5} \leq a \leq 1 \text{ のとき, } g(a) \text{ は}$$

$$\text{最大値 } g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}, \quad \text{最小値 } g\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{49}{25}$$

$$\text{よって, 求める } y \text{ 座標のとり得る値の範囲は } -\frac{49}{25} \leq y \leq -\frac{3}{4} \quad \blacksquare$$

- 2** (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b})$ は平面 OAB 上のベクトルで $\vec{a}$ に垂直。

これと平行な単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{|\vec{a} - 2\vec{b}|} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2}} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}}, \\ \vec{c} \cdot \vec{e} &= \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})}{\sqrt{3}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \vec{c}}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$\vec{OH} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{e})\vec{e}$ であるから

$$\vec{OH} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$(2) (1) \text{の結果から} \quad \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right|^2 = \frac{2}{9}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) - \frac{2\sqrt{2}}{3}(\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{c}|^2 \\ &= \frac{2}{9} \cdot 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad CH = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

別解 $\overrightarrow{CH}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ と垂直であることに注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right\} \cdot \overrightarrow{CH} = -\vec{c} \cdot \overrightarrow{CH} = -\vec{c} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{c} \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}(\vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}) + |\vec{c}|^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad CH = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(3) \triangle OAB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{四面体 } OABC \text{ の体積は } \frac{1}{3} \triangle OAB \cdot CH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{12}$$

3 (1) A は 6 以外の目が出て, B が 6 の目が出る確率であるから

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

(2) 一方の 1 回目, 2 回目に出た目をそれぞれ j, k とする. A が 2 回投げて A が勝っていないとき, A の 2 回の目の出方は, 表の $\times$ 印の示す 10 通り. このとき, B がちょうど 2 回投げて B が勝つ目の出方は, 表の $\circ$ 印の示す 20 通り. よって, 求める確率は

$j \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$
2	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
3	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
4	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
5	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
6						

$$\frac{10}{6^2} \times \frac{20}{6^2} = \frac{25}{162}$$

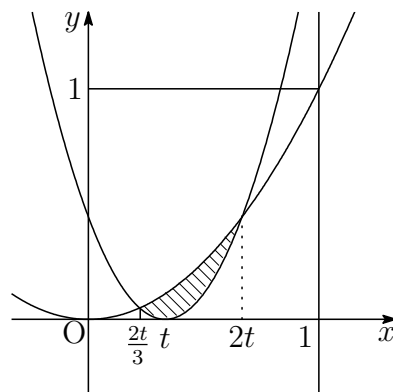
(3) A, B とともに 2 回の目の出方は, 表の $\times$ 印の示す 10 通り. よって, 求める確率は

$$\left(\frac{10}{36} \right)^2 = \frac{25}{324}$$

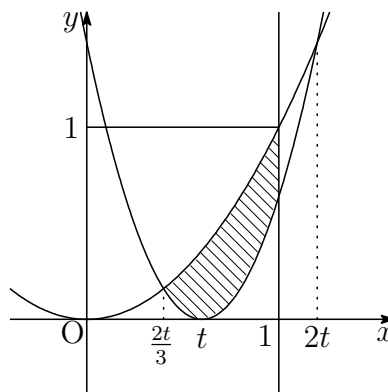
- 4 (1) 2つの放物線 $y = x^2$, $y = 4(x-t)^2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = 4(x-t)^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{2t}{3}, 2t$$

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき



$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき



(i) $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \{x^2 - 4(x-t)^2\} dx \\ &= -3 \int_{\frac{2t}{3}}^{2t} \left(x - \frac{2t}{3}\right) (x - 2t) dx \\ &= -3 \left(-\frac{1}{6}\right) \left(2t - \frac{2t}{3}\right)^3 = \frac{32}{27} t^3 \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\frac{2t}{3}}^1 \{x^2 - 4(x-t)^2\} dx \\ &= \int_{\frac{2t}{3}}^1 (-3x^2 + 8tx - 4t^2) dx \\ &= \left[-x^3 + 4tx^2 - 4t^2x \right]_{\frac{2t}{3}}^1 \\ &= \frac{32}{27} t^3 - 4t^2 + 4t - 1 \end{aligned}$$

よって

$$S(t) = \begin{cases} \frac{32}{27} t^3 & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \\ \frac{32}{27} t^3 - 4t^2 + 4t - 1 & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \end{cases}$$

$$(2) \ 0 < t < \frac{1}{2} \text{ のとき } S'(t) = \frac{32}{9}t^2 > 0$$

$$\frac{1}{2} < t < 1 \text{ のとき } S'(t) = \frac{32}{9}t^2 - 8t + 4 = \frac{4}{9}(4t - 3)(2t - 3)$$

したがって、 $S(t)$ の増減表は、次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$S'(t)$		+		+	0	-	
$S(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$\frac{5}{27}$

よって、求める最大値は $S\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$

