

平成22年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 $f(x) = x^3$ とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

が成り立つことを示せ.

(2) $y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x) > \frac{(x - y)f(b) + (b - x)f(y)}{b - y}$$

が成り立つような b の範囲を求めよ.

2 放物線 $C: y = x^2$ に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り, P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ.

(2) l を (1) で求めた直線とする. $a \neq 0$ のとき, 直線 $x = a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ.

(3) (2) で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し, F の座標を求めよ.

3 数直線上を動く点 P がある. 裏表の出る確率が等しい硬貨を2枚投げて, 2枚とも表が出たら P は正の向きに1だけ移動し, 2枚とも裏が出たら P は負の向きに1だけ移動し, それ以外のときはその位置にとどまるものとする. P が原点 O を出発点として, このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする. 以下の問いに答えよ.

(1) $S_2 = -1$ となる確率を求めよ.

(2) $S_3 = 1$ となる確率を求めよ.

(3) 試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき, S_n を求めよ.

(4) k を整数とするとき, $S_n = k$ となる確率を求めよ.

- 4 四面体 ABCD において、辺 AB の中点を M、辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 等式

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$$

を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

- (2) 点 Q が等式

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$$

を満たしながら動くとき、点 Q が描く図形を求めよ。

- (3) 点 R が等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

を満たしながら動くとき、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

- (4) (2) の点 Q が描く図形と (3) の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。

解答例

1 (1) $f(x) = x^3$ より

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2,$$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{y^3 - x^3}{y - x} = y^2 + xy + x^2$$

$0 \leq a < x < y$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x} &= a^2 - y^2 + x(a - y) \\ &= (a - y)(x + y + a) < 0 \end{aligned}$$

よって
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(2) $f(x) > \frac{(x - y)f(b) + (b - x)f(y)}{b - y}$ より ($y < b$)

$$\begin{aligned} \{(b - x) + (x - y)\}f(x) &> (x - y)f(b) + (b - x)f(y) \\ (b - x)\{f(x) - f(y)\} &> (x - y)\{f(b) - f(x)\} \end{aligned}$$

$b - x > 0$, $x - y > 0$ に注意して

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

(1) の計算と同様にして

$$x^2 + xy + y^2 > b^2 + bx + x^2 \quad \text{ゆえに} \quad (b - y)(b + x + y) < 0$$

$b - y > 0$ より, $b + x + y < 0$ であるから

$$-b - x - y > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (b - x) + (b - y) + (-3b) > 0$$

$b - x > 0$, $b - y > 0$ であるから, これが常に成立するための条件は

$$-3b \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{b \leq 0}$$



- 2** (1) $C: y = x^2$ より, $y' = 2x$

C 上の点 $P(a, a^2)$ における接線 l の方向ベクトル $\vec{v}$ は $\vec{v} = (1, 2a)$

l 上の点 $Q(x, y)$ について, $\vec{v} \perp \overrightarrow{PQ}$ より, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ であるから

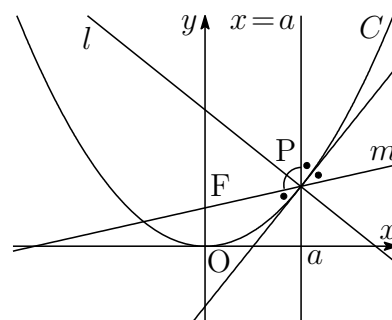
$$1(x - a) + 2a(y - a^2) = 0$$

よって, 直線 l の方程式は $x + 2ay - a - 2a^3 = 0$

- (2) 直線 $x = a$ の偏角 (x 軸の正の向きとなす角) は $\frac{\pi}{2}$, 直線 l の偏角を θ , 直線 m の偏角を φ とすると

$$\frac{\pi}{2} + \varphi = 2\theta, \quad \tan \theta = -\frac{1}{2a}$$

したがって, 直線 m の傾きは



$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \tan \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) = -\frac{1}{\tan 2\theta} \\ &= -\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} = -\frac{1 - \left(-\frac{1}{2a}\right)^2}{2 \left(-\frac{1}{2a}\right)} = \frac{4a^2 - 1}{4a} \end{aligned}$$

よって, 直線 m は点 $P(a, a^2)$ を通り, 傾き $\frac{4a^2 - 1}{4a}$ の直線であるから

$$y - a^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a}(x - a) \quad \text{よって} \quad y = \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

補足 接線の偏角を β とすると $\frac{\pi}{2} + \varphi = 2\beta$, $\tan \beta = 2a$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= \tan \left(2\beta - \frac{\pi}{2} \right) = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - 2\beta \right) = -\frac{1}{\tan 2\beta} \\ &= -\frac{1 - \tan^2 \beta}{2 \tan \beta} = -\frac{1 - (2a)^2}{2 \cdot 2a} = \frac{4a^2 - 1}{4a} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $(4a^2 - 1)x - 4a \left(y - \frac{1}{4} \right) = 0$

したがって, a の値によらず, 直線 m は定点 $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る. ■

- 3** (1) 2枚の硬貨をそれぞれ独立に、表が出たら正の向きに $+0.5$ 、裏が出たら負の向きに -0.5 だけ進むと考えてもよい. $S_2 = -1$ は硬貨を合計 4 回投げて、そのうち表が 1 回、裏が 3 回出る確率であるから

$$\frac{4!}{1!3!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

- (2) $S_3 = 1$ は硬貨を合計 6 回投げて、そのうち表が 4 回、裏が 2 回出る確率であるから

$$\frac{6!}{4!2!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

- (3) 試行を n 回繰り返して出た表の総数が i ということは、硬貨を合計 $2n$ 回投げて、そのうち表が i 回、裏が $2n - i$ 回出ることであるから

$$S_n = (+0.5)i + (-0.5)(2n - i) = i - n$$

- (4) $S_n = k$ となる確率は、硬貨を $2n$ 回投げて、表が $n + k$ 回、裏が $n - k$ 回出る確率であるから ($|k| \leq n$)

$$\frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!2^{2n}}$$

よって求める確率を $P(S_n = k)$ とすると

$$P(S_n = k) = \begin{cases} \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!2^{2n}} & (|k| \leq n) \\ 0 & (|k| > n) \end{cases}$$



- 4 (1) 辺 AB の中点が M, 辺 CD の中点が N であるから

$$\overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}, \quad \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}}{2}$$

等式 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を満たす点 P が存在するとき

$$2\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{PN} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ となり, 不適. よって, 等式を満たす点 P は存在しない.

- (2) 2 点 M, N の中点を O とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= 2(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OQ}) \\ &= 2(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}) \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}| \quad \text{より}$$

$$|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OQ}|$$

上式の両辺を平方すると

$$|\overrightarrow{OM}|^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{ON}|^2 - 2\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2$$

$|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}|$ に注意して, 整理すると

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$$

よって, Q は 2 点 M, N の中点 O を通り, $\overrightarrow{MN}$ に垂直な平面を描く.

- (3) $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d}), M(\vec{m}), N(\vec{n}), R(\vec{r})$ とし, これを等式

$$|\overrightarrow{RA}|^2 + |\overrightarrow{RB}|^2 = |\overrightarrow{RC}|^2 + |\overrightarrow{RD}|^2$$

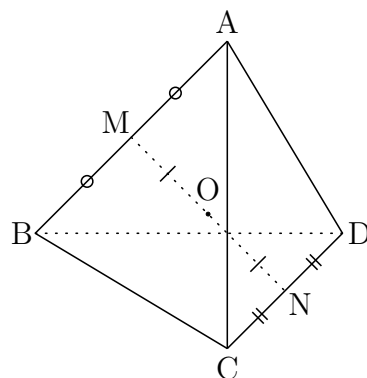
に代入すると

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{r}|^2 + |\vec{b} - \vec{r}|^2 &= |\vec{c} - \vec{r}|^2 + |\vec{d} - \vec{r}|^2 \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{r} &= |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - 2(\vec{c} + \vec{d}) \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{m}, \vec{c} + \vec{d} = 2\vec{n}$ であるから

$$4(\vec{n} - \vec{m}) \cdot \vec{r} = -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2$$

$$\overrightarrow{MN} = \vec{n} - \vec{m} \text{ に注意して} \quad 4\overrightarrow{MN} \cdot \vec{r} = -|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 \quad \cdots (*)$$



(*) の位置ベクトルの始点を M とすると

$$4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR} = -|\overrightarrow{MA}|^2 - |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$$

よって、内積 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である.

(4) (*) の位置ベクトルの始点を O とすると

$$4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OR} = -(|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2) + |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 \quad \dots (**)$$

このとき

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MA}|^2 \\ &= 2|\overrightarrow{OM}|^2 + 2|\overrightarrow{MA}|^2 = 2|\overrightarrow{OM}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2, \\ |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{OD}|^2 &= |\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}|^2 + |\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{NC}|^2 \\ &= 2|\overrightarrow{ON}|^2 + 2|\overrightarrow{NC}|^2 = 2|\overrightarrow{ON}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{CD}|^2 \end{aligned}$$

上の 2 式を $|\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{ON}|$ に注意して, (**) に代入すると

$$4\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{CD}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2)$$

したがって $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \iff \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OR} = 0$

これと (2) の結果から, 点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ である.

補足 (2) は, $|\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB}| = |\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD}|$ より

$$|2\overrightarrow{QM}| = |2\overrightarrow{QN}| \quad \text{すなわち} \quad |\overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{NQ}|$$

よって, 点 Q は 2 点 M, N から等距離にある, すなわち, M, N の中点を通り, MN に垂直な平面を描く. (これでもよいが, (4) との形式を合わせるために先の解答を与えた.) ■